Г Е О М Е Т Р И Я

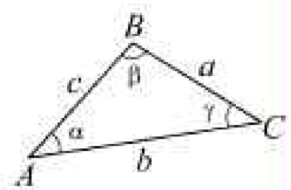
Учебное пособие для абитуриентов

Некоторые основные сведения из геометрии

Решения геометрических задач часто вызывают трудности у учащихся. Это связано в первую очередь с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена только с использованием определенной формулы. При решении большинства задач необходимо свободно владеть всем теоретическим материалом. Но и при хорошем знании теории приобрести навык в решении задач можно лишь решив достаточно много задач, начиная с простых и переходя к более сложным.

Напомним основные понятия.

Треугольники



Треугольник – это фигура, образованная замкнутой ломаной, состоящей из трех звеньев. Вершины треугольника обычно обозначатся большими буквами латинского алфавита A, B, C; а противолежащие им стороны – теми же самыми маленькими буквами.

Если все три угла треугольника острые, то он называется *остроугольным*, а если один из его углов тупой, то *тупоугольным*. Треугольник, имеющий прямой угол, называется *прямоугольным*, две его стороны, образующие прямой угол, называется *катетами*, третья сторона – *гипотенуза*.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны имеют одинаковую длину; эти стороны называют *боковыми*, а третью сторону – *основанием*. Точка пересечения боковых сторон называется *вершиной* равнобедренного треугольника.

Все определения не зависят от расположения треугольника на чертеже.

Треугольник называется *равносторонним* (правильным), если все его стороны равны по длине. В правильном треугольнике все углы равны по 60 °

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180 ° или π радиан; против большей стороны лежит больший угол, и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

14:47

Высотой треугольника (h) называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение. Три высоты треугольника (или их продолжения) всегда пересекаются в одной точке, которая называется *ортоцентром*.

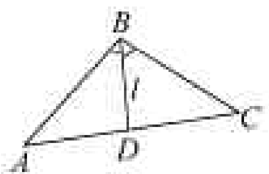
Высоты треугольника:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(-a)(p-b)(p-c)}; \qquad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Медианой треугольника (m) называется отрезок, соединяющий произвольную ее вершину с серединой противолежащей стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой *центром тяжести* треугольника. Эта точка всегда находится внутри треугольника. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Биссектрисой треугольника (l) называется отрезок биссектрисы любого угла этого треугольника от вершины до пересечения с противоположной стороной.

Все три биссектрисы пересекаются в одной точке, лежащей всегда внутри треугольника и являющейся центром вписанной окружности.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $AD:DC = AB:BC$ (см. рис.).

В любом треугольнике – по три высоты, биссектрисы и медианы, и биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой, т.е. $h_a \le l_a \le m_a$, $h_b \le l_b \le m_b$, $h_c \le l_c \le m_c$.

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны треугольника. Все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке, которая удалена от вершин треугольника на одно и тоже расстояние (R) и поэтому является центром окружности (радиуса R), описанной около этого треугольника: $R = \dfrac{abc}{4S}$, где S – площадь треугольника, или $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ для правильного треугольника.

Средняя линия – это отрезок, соединяющий середины его сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Три средних линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.

Формулы для площади треугольника:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

14:47

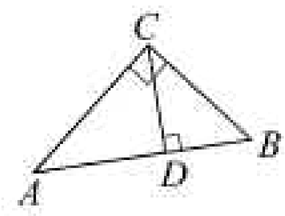
$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{cb\sin A}{2};$$

$$S=\frac{abc}{4R};\quad S=p\cdot r;$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Метрические соотношения между элементами треугольника.



Если CD – высота на гипотенузу в ΔABC (см. рис.), то

1. высота делит треугольник на два подобных исходному;
2. произведение высоты, опущенной на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она делится основанием высоты, т.е. $CD^2 = AD\cdot DB$;
3. катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией на нее этого катета, т.е. $AC^2 = AB\cdot AD$, $BC^2 = AB\cdot DB$;

4. проекции катетов на гипотенузу относятся как квадраты соответствующих катетов, т.е. $AD:DB = AC^2:CB^2$;
5. теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ или $AB^2 = AC^2 + CB^2$;
6. высота на гипотенузу $CD = \dfrac{AC \cdot CB}{AB}$; катет, лежащий против угла в 30 °, равен половине гипотенузы.

Медиана на гипотенузу равна половине гипотенузы, и центр описанной окружности – это середина гипотенузы.

В правильном треугольнике со стороной a:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Теорема синусов. Отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A; \;\; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B; \;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Четырехугольники

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Параллелограмм обладает следующими свойствами:

1. противоположные стороны равны;
2. противолежащие углы равны;
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам;
4. сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон: $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.

Формулы площади параллелограмма:

$$S = ah_a;\ \ S = ab\sin\alpha,$$

где a, b – стороны параллелограмма; α – угол параллелограмма; h_a –высота, опущенная на сторону a.

Ромб – параллелограмм, все стороны которого равны. Обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов.

Формулы для вычисления площади:

$$S = ah_a;\ \ S = \frac{1}{2}d_1d_2;\ \ S = a^2\sin\alpha,$$

где a – сторона ромба; d_1 и d_2 – диагонали ромба.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.
Формула для вычисления площади прямоугольника:

$$S = a \cdot b.$$

Квадрат – прямоугольник с равными сторонами; обладающий всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

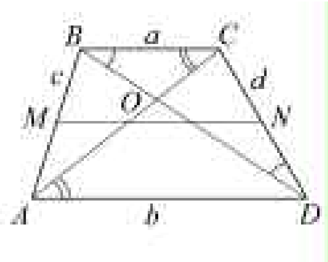
Площадь квадрата:

$$S = a^2,$$

где a – сторона квадрата.

Трапеция – четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие – не параллельны.

Две параллельные стороны трапеции называются основанием, а две другие – боковыми сторонами.



Высота трапеции – это перпендикуляр, опущенный из любой точки ее основания на другое основание или его продолжение.

Средняя линия – отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Она параллельна основаниям и равна их полусумме, т.е.

14:47

$$MN = \frac{a+b}{2}.$$

Трапеция называется равнобокой, если ее боковые стороны равны; прямоугольной, если одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

Диагоналями трапеция разбивается на четыре треугольника, из которых два (прилегающие к основаниям) подобны, т.е. $\Delta AOB \sim \Delta BOC$, а два других (прилегающие к боковым сторонам) равновелики, т.е. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

Площадь трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

В трапецию можно вписать окружность в том и только в том случае, если $a + b = c + d$.

14:47

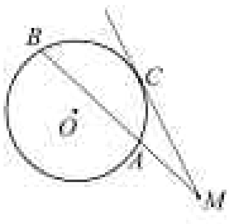
Окружность и круг

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности.

Круг состоит из окружности и множества точек, заключенных внутри окружности.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности, обладает следующими свойствами:

1. дуги, заключенные между параллельными хордами, равны;

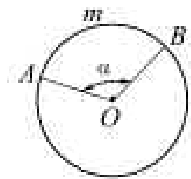


2. диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, и обратно, диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.

Если из точки M (см. рис.), лежащей вне окружности, проведены касательная MC и секущая MA, то $MC^2 = MA \cdot MB$.

Длина окружности радиусом R равна

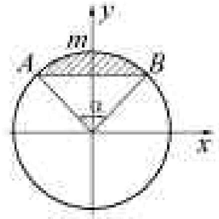
$$l = 2\pi R = \pi d.$$



Площадь круга: $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Длина дуги окружности радиусом R и центральным углом α, измеренная в радианах равна $l = R\alpha$.

$$S_{сек} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$



Площадь сегмента

$$S_{сегм} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha).$$

В геометрии не существует такой классификации типов задач и связанных с ними методов решений, как в алгебре или тригонометрии. Обычно рассматриваются два основных метода решения задач по геометрии: чисто геометрический или алгебраический.

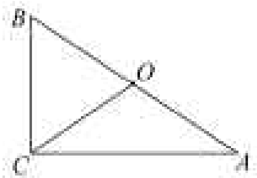
Геометрический метод позволяет найти искомую величину в результате нескольких шагов, постепенно переходя от известных величин к искомой.

Алгебраический (иначе аналитический) метод решения геометрических задач заключается в том, что в рассматриваемой фигуре одна (или несколько) неизвестных обозначается буквами, и затем задача решается геометрически.

Примеры решения некоторых задач по планиметрии

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 см и 40 см. определите медиану треугольника, проведенную к гипотенузе.

Решение. Около треугольника CAB можно описать окружность:



$$OB = OA = CO = R.$$

Определим AB по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 30^2 + 40^2 = 2500.$$

$$AB = \sqrt{2500} = 50.$$

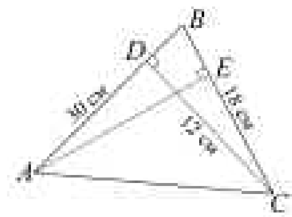
Следовательно, $CO = R = 25$ см.

Ответ: 25 см.

Задача 2. Две стороны треугольника равны 30 см и 18 см. Высота, опущенная на первую сторону равна 12 см. Найдите высоту, опущенную на другую сторону.

Решение: Для определения высоты

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} BC \cdot AE,$$

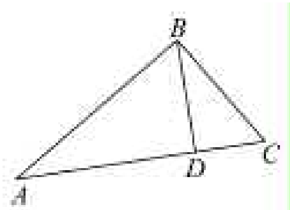


следовательно, $AE = \frac{AB \cdot CD}{BC} = \frac{30 \cdot 12}{18} = 20$ см.

Ответ 20 см.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла на гипотенузу опущен перпендикуляр, длиной 10 см. Проекция одного из катетов на гипотенузу равна 20 см. Найти радиус круга, описанного около этого треугольника.

Решение: по теореме о метрическом соотношении в прямоугольном треугольнике, имеем:



$$BD^2 = AD \cdot DC;$$

$$DC = \frac{BD^2}{AD} = \frac{100}{20} = 5 \text{ см};$$

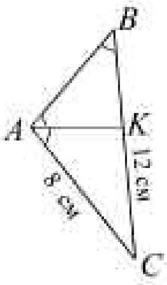
$$AC = AD + DC = 20 + 5 = 25 \text{ см};$$

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: 12,5 см.

Задача 4. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим сторонам равны соответственно 12 см и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

14:47



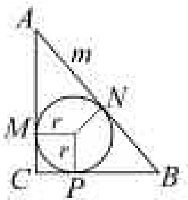
Решение: Пусть AK – биссектриса угла A. Тогда $\angle KAC = \angle ABC \Rightarrow \Delta AKC$ подобен ΔABC.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{KC}{AC} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow KC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{3};$$

$$AK = BK = BC - KC = 12 - \frac{16}{3}, \quad AB = \frac{AK \cdot AC}{KC} = 10.$$

Ответ: 10 см.

Задача 5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, радиус вписанной окружности равен r. Определить катеты. При каком соотношении между r и m задача имеет решение?



Решение: Пусть x, y – катеты данного треугольника. Тогда по теореме Пифагора

$$m^2 = x^2 + y^2,$$

$$AM = AN, \qquad \begin{matrix} x - r = AN; \\ y - r = m - AN. \end{matrix} \Rightarrow \quad r = \frac{x + y - m}{2},$$

Решая систему $\begin{cases} m^2 = x^2 + y^2, \\ r = \dfrac{x + y - m}{2}; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2r + m = x + y, \\ m^2 = (x + y)^2 - 2xy; \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2r + m, \\ xy = 2r^2 + 2rm; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2r + m) - y, \\ ((2r + m) - y)y = 2r^2 + 2rm. \end{cases} \Rightarrow$$

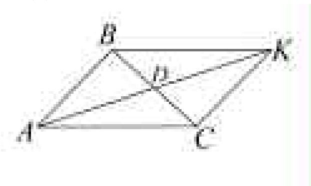
$$x = \frac{2r + m + \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2};$$

$$y = \frac{2r + m - \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2}.$$

$$m^2 \geq 4r^2 + 4rm, \quad r \leq \frac{m(\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{2r + m \pm \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2}$, при $r \leq \dfrac{m(\sqrt{2} - 1)}{2}$.

Задача 6. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 27$, $AC = = 29$ и длина медианы $AD = 26$.



Решение: Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCK$. $BD = DC$, $AD = DK$, $AK = 52$,

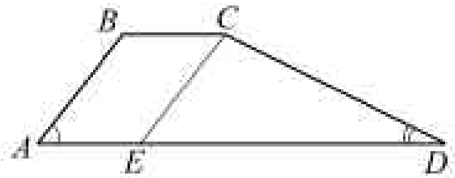
$$S_{ABC} = S_{ABK} = \frac{1}{2} S.$$

Площадь треугольника АВК вычислим по формуле Герона:

$$P=\frac{27+29+52}{2}=54;\quad S_{ABK}=\sqrt{54(54-27)(54-29)\cdot 2}=270.$$

Ответ: 270.

Задача 7. В трапеции сумма углов при большем основании равна 90 °. Одна из боковых сторон в 2 раза меньше другой. Разность длин оснований равна $9\sqrt{5}$. Найти длину большей боковой стороны.



Решение: Проведем $CE \parallel AB$, Тогда $\angle BAE = \angle CED$ (соответствующие углы при параллельных прямых). $\angle CED + \angle CDE = 90°$ (по условию), отсюда $\angle ECD = 90°$, $ED = 9\sqrt{5}$ см. Треугольник CED – прямоугольный.

Обозначим $CE = x$, тогда $CD = 2x$ и по теореме Пифагора

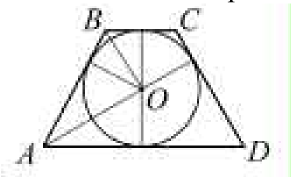
$$ED^2 = CE^2 + CD^2,\qquad x^2 + 4x^2 = 81\cdot 5;$$

$$5x^2 = 5\cdot 81,\qquad x^2 = 81,\qquad x = 9 \text{ см}.$$

$$CD = 2x,\qquad CD = 18 \text{ см}.$$

Ответ: 18 см.

Задача 8. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Под каким углом видна боковая сторона из ее центра.



Решение: Определим угол AOB.

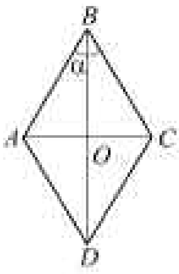
Центр окружности вписанной в угол лежит на биссектрисе, $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAD, \quad \angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC,$

а сумма прилежащих углов $\angle BAD + \angle ABC = 180\,°$; $\angle BAO + + \angle ABO = 90\,°$, т.е. $\angle BOA = 90\,°$.

Ответ: 90 °.

Задача 9. Найти острый угол ромба, сторона которого есть средняя пропорциональная величина между диагоналями.

Решение: Пусть $AB = a$ и $\angle ABC = \alpha$.



$$S_{ромба} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha,$$

$\frac{1}{2} BD \cdot AC = a^2 \sin\alpha,$ а по условию $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AC},$

отсюда $BD \cdot AC = a^2;$

$$\frac{1}{2}a^2 = a^2 \sin\alpha, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

14:47

Следовательно, $\alpha = 30°$.

Ответ: 30 °.

Задача 10. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$.

Решение: Пусть *a*, *b* – катеты данного треугольника; *c* – его гипотенуза; *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей.

Тогда $$R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{a+b-c}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \sin\alpha + \cos\alpha - 1,$$

где α - один из острых углов треугольника.

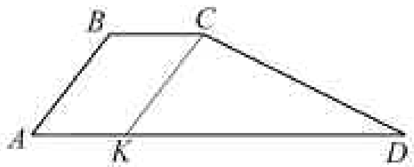
Отсюда $$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sin\alpha + \cos\alpha;$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = 1 + \sin 2\alpha, \qquad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 2\alpha = 60^\circ,$$

$\alpha = 30°$, а другой угол 60 °.

Ответ: 30 ° и 60 °.

Задача 11. Большая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая – b, непараллельные стороны равны c и d. Найдите площади трапеции.



Решение: Пусть $ABCD$ – трапеция, $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = = d$, h – высота трапеции.

Проведем $CK \parallel AB$. Тогда $KD = a - b$; $CK = c$.

$$h = \frac{2S_{KCD}}{a-b}.$$

$$S_{ABCK} = h \cdot AK = \frac{2b \cdot S_{KCD}}{a-b}; \quad S_{ABCD} = S_{ABCK} + S_{KCD} = S_{KCD} \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

По теореме Герона:

$$S_{KCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)(b+c+d-a)},$$

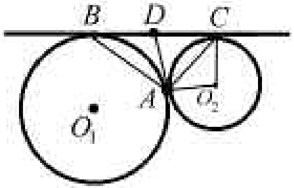
$$S = \frac{a+b}{4(a-b)} \times \sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)(b+c+d-a)}.$$

14:47

Ответ: $\dfrac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)(b+c+d-a)}.$

Задача 12. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных равны 6 см и 8 см.

Решение: Пусть BC – общая касательная к двум данным окружностям O_1 и O_2. B и C – точки касания, AB = 8 см, AC = 6 см.



Проведем касательную в точке A до пересечения с BC в точке D. Тогда $DA = BD = DC$. $\angle BAC = 90°$, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. BD = 5 см.

$\angle AO_2C = 180° - \angle ADC = \angle BDA$.

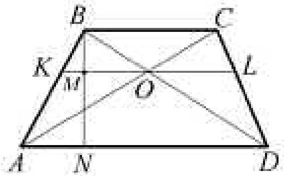
Треугольники ABD и ACO_2 подобны.

$$\frac{BD}{AO_2} = \frac{AB}{AC}, \quad AO_2 = \frac{BD \cdot AC}{AB} = \frac{5 \cdot 6}{8} = \frac{15}{4}.$$

Аналогично, $AO_1 = \dfrac{20}{3}$.

Ответ: $\dfrac{15}{4}$ см, $\dfrac{20}{3}$ см.

Задача 13. В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенной между боковыми сторонами трапеции.



Решение: Пусть в трапеции $ABCD$ основание BC равно a, а основание $AD = b$; AC и BD – диагонали; O – точка их пересечения; BN – высота трапеции; M – точка пересечения высоты BN и искомого отрезка KL.

По условию $KL \parallel BC$, и, следовательно треугольник ABD подобен треугольнику KBO, а треугольник ABC подобен треугольнику AKO. Так как в подобных треугольниках высоты пропорциональны сторонам, на которые они опущены, то

$$\frac{KO}{AD} = \frac{BM}{BN}, \qquad \frac{KO}{BC} = \frac{MN}{BN}.$$

Отсюда, $$\frac{KO}{AD} + \frac{KO}{BC} = \frac{BM}{BN} + \frac{MN}{BN}.$$

$$KO\left(\frac{BC + AD}{BC \cdot AD}\right) = \frac{BM + MN}{BN}; \qquad \frac{BM + MN}{BN} = KO \cdot \frac{a+b}{ab} = 1.$$

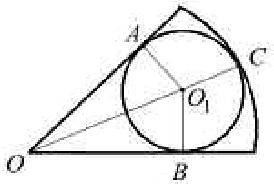
Отсюда $$KO = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично, из подобия треугольников DOL и DBC, а также треугольников OCL и ACD, находим $OL = \dfrac{ab}{a+b}$.

И, следовательно, $KL = KO + OL = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $KL = \dfrac{2ab}{a+b}.$

Задача 14. В круговой сектор, дуга которого содержит 60 °, вписан круг. Найдите отношение площади сектора к площади этого круга.



Решение: O_1A – радиус круга; $O_1A = r$. $O_1A \perp OA$, $O_1B \perp OB$.

$\Delta OAO_1 = \Delta\, O_1OB$ (прямоугольные с общей гипотенузой OO_1, $AO_1 = O_1B$).

Следовательно,

$$\angle O_1O = \frac{1}{2}\angle AOB = 30\ °.$$

Отсюда $O_1A = OO_1 \cdot \sin 30\ ° = 0{,}5 \cdot OO_1$.

$$OC = OO_1 + O_1C = 3r.$$

Площадь круга $S_{\text{кр}} = \pi r^2$.

14:47

Площадь сектора $\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi R^2=\frac{1}{6}\pi(3R)^2=\frac{3}{2}\pi r^2$.

$$\frac{S_{сект}}{S_{кр}}=\frac{(3/2)\pi r^2}{\pi r^2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: 3/2.

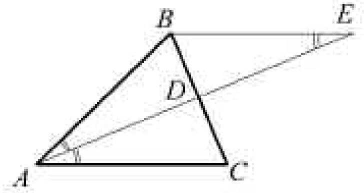
Задача 15. Точка B лежит на отрезке AC и $\frac{AB}{BC}=k\neq 0.$ Найти AC/AB.

Решение: Пусть $AB = x$, тогда из соотношения $AB/BC = k$ следует, что $BC = x/k$.

Значит $AC = AB + BC = x + \frac{x}{k}$. Отсюда $\frac{AC}{AB}=\frac{x(1+\frac{1}{k})}{x}=1+\frac{1}{k}$.

Ответ: $1+\frac{1}{k}$.

Задача 16. Пусть ABC – произвольный треугольник и AD – его биссектриса (точка D лежит на BC). Доказать, что $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.



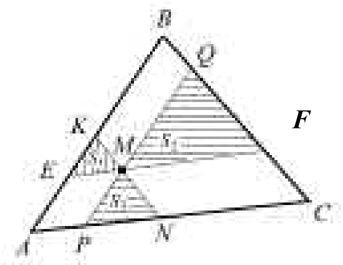
Решение: Проведем через точку B прямую параллельную AC и продолжим биссектрису до пересечения с этой прямой в точке E.

Углы BAD и DAC равны, так как AD – биссектриса. Кроме того $\angle BED = \angle DAC$, ибо эти углы внутренние накрест лежащие.

В треугольнике ABE: $\angle BAE = \angle BEA$, $AB = BE$.

Треугольники ADC и BDE подобны, следовательно,

$$\frac{BE}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC},$$ что и требовалось доказать.



Задача 17. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC проведены три прямые, параллельные его сторонам. При этом образовалось три треугольника, площади которых S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника ABC.

Решение: Треугольники EKM, MQF, PNM подобны треугольнику ABC. Пусть площадь треугольника ABC будет S, тогда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{EM^2}{AC^2}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{MF^2}{AC^2}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{PN^2}{AC^2}.$$

Отсюда $$EM = \sqrt{\frac{S_1}{S}}AC; \quad MF = \sqrt{\frac{S_2}{S}}AC; \quad PN = \sqrt{\frac{S_3}{S}}AC.$$

Тогда $$AC = AC\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right).$$

Отсюда $$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найти длину гипотенузы.

[5 см]

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 см и 40 см. Определить медиану треугольника. [25 см]

3. Периметр прямоугольного треугольника равен 40 см, а один из его катетов равен 8 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

[17 см]

4. Внутри правильного треугольника произвольно выбрана точка M. Чему равна сумма расстояний от этой точки до стороны треугольника.

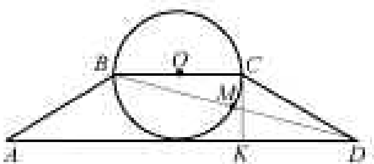
5. Найдите площадь трапеции, зная длины d_1, и d_2 ее диагоналей и длину высоты h. [$\frac{1}{2}h\left(\sqrt{d_1^2-h^2}+\sqrt{d_2^2-h^2}\right)$]

6. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 3$ см, $BC = 7$ см и длина медианы $BM = 4$ см. [$6\sqrt{3}$]

7. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r. Найти площадь этого треугольника, если длина гипотенузы равна c.

[$r^2 + cr$]

8. Диаметр CD параллелен хорде AB в той же окружности. Найти длину хорды AB, если $AC = b$, $BC = a$ ($a > b$). [$\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$]



9. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность, которая проходит через середины диагоналей трапеции и касается основания AD (см. рис.). Найти углы трапеции. [30 °, 150 °]

10. Дан треугольник ABC, $AB = 4$; $\cos B = 1/3$; $\sin C = 2/3$. Найдите длину стороны AC.

[$4\sqrt{2}$]

14:47

11. В треугольнике ABC заданы $BC = 4$; $AB = 5$; $\cos C = 1/3$. Найти синус угла A. $\left[\dfrac{8\sqrt{2}}{15}\right]$

12. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

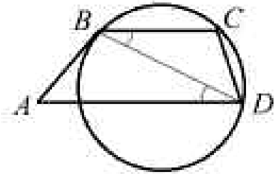
$$\left[\frac{ab}{a+b}\right]$$

13. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельна ее основанию, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если длины оснований трапеции равны a и b.

$$\left[\frac{2ab}{a+b}\right]$$

14. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найти углы треугольника MNC, если $A = \alpha$, $B = \beta$. $[\alpha, \beta]$

15. Площадь треугольника ABC равна 16 см^2. Найти длину стороны AB, если $AC = 5$ см, $BC = 8$ см и угол C – тупой. $[\sqrt{137}]$

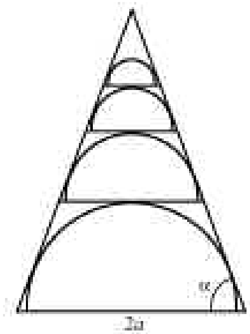


16. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B (см. рис.). Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.

[$\sqrt{ab}$]

17. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, находится на расстоянии $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см от вершин A и B. Найти катеты. [3 см, 4 см]

18. Диагональ трапеции делит ее площадь в отношении 3 : 7. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца верхнего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. [3/2]



19. В равнобедренную трапецию со стороной $2a$ и углом при основании α вписаны полукруги так, что первый стоит на основании своим диаметром, второй на первом полукруге и т.д. до бесконечности. Найти сумму площадей всех вписанных полукругов.

$$\left[\frac{\pi a^2 \sin\alpha}{2\left(1-4\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

Тесты по планиметрии

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

1. 20 см; *2*. 24 см. *3*. 17 см; *4*. 21 см.

2. В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

1. $2\sqrt{5}$; *2*. $3\sqrt{6}$; *3*. $2\sqrt{6}$; *4*. $\sqrt{6}$.

3. Внутри окружности радиуса R расположены 3 равные окружности, которые касаются друг друга в данной окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

1. $\dfrac{R\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$; *2*. $\dfrac{R}{\sqrt{3}+2}$; *3*. $\dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$; *4*. $\dfrac{\sqrt{3}-2}{R\sqrt{3}}$.

4. Определить площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см 20 см, а непараллельные 13 см и 37 см.

1. 460; *2*. 486; *3*. 540; *4*. 480.

5. Если в треугольнике ABC заданы $BC = 3$, $\cos C = 1/4$, $\sin A = \quad = 3/5$, то длина стороны AB равна

1. $\dfrac{5\sqrt{11}}{4}$; *2*. $\dfrac{5\sqrt{13}}{4}$; *3*. $\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$; *4*. $\dfrac{5\sqrt{29}}{4}$.

6. В равнобедренной трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Определить площади трапеции.

1. 542; *2*. 270; *3*. 450; *4*. 540.

7. В данный круг, радиус которого 3 дм вписано 6 равных кругов, каждый из которых касается данного круга и двух соседних кругов. Найти диаметры вписанных кругов.

1. 1; *2*. 2; *3*. 3; *4*. 1/2.