Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет

Л.И. Лазарева

Алгебраические преобразования, комплексные числа, векторная алгебра, элементы комбинаторики и бином Ньютона

Учебное пособие для абитуриентов

Томск 2004

УДК 53

Лазарева Л.И.
Алгебраические преобразования, комплексные числа, векторная алгебра, элементы комбинаторики и бином Ньютона
— Учебное пособие для абитуриентов. — Томск: Изд–во ТПУ, 2004. — 129 с.

Пособие содержит основные теоретические и практические сведения по разделам математики: **алгебраические преобразования, комплексные числа, векторная алгебра, элементы комбинаторики и бином Ньютона.**

Данное учебное пособие предназначено для слушателей курса математики в рамках школьной программы, оно построено таким образом, чтобы им мог воспользоваться учитель средней школы на школьных занятиях, абитуриент любой формы обучения: дневной, заочной и во время занятий в ЕНШ, в школе молодого физика и на подготовительных отделениях Томского политехнического университета.

УДК 53

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент ТПУ
В.Н. Задоржный

Введение

Учебное пособие “Избранные вопросы математики” содержит интересные разделы математики: **алгебраические преобразования, комплексные числа, векторная алгебра, элементы комбинаторики и бином Ньютона.**

Эти разделы практически не связаны между собой. Единым в данном пособии будет форма работы по каждому разделу.

Материал каждого раздела будет изложен таким образом: основные теоретические сведения и методические рекомендации по решению типовых задач и задач на качественное усвоение теории; вопросы для самоподготовки по данному разделу.

Даны задачи с ответами, предлагаемые для самостоятельного решения, тесты по каждой теме. В рамках каждого раздела предложены проверочные работы по закреплению необходимых навыков по каждой теме (25-30 минут).

Вопросы для самоподготовки должны быть разобраны на занятиях или самостоятельно, а следующее занятие предполагается начинать с 5-7 минутного письменного опроса по теории.

Предлагается следующий *план занятия по каждой* теме:

1. Письменный опрос по теории и разбор основных теоретических понятий устно.

2. Решение и рекомендации по решению типовых задач.

3. Работа по тестам.
4. Самостоятельная работа школьника по теме.
5. Проверочные работы по закреплению темы (25 - 30 мин.).

1 Преобразование алгебраических выражений

1.1 Теоретические основы темы и решение типовых задач

1.1.1 Формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b);\\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);\\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^2=a^3-b^3-3ab(a-b);\\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^2=a^3+b^3+3ab(a+b);\end{aligned} \tag{1.1}$$

Кроме того, если рассмотреть:

$$a=a^{\frac{1}{2}\cdot 2}=(\sqrt{a})^2,\quad \text{при}\quad a\geqslant 0;\quad a=(a^{\frac{1}{3}})^3=(\sqrt[3]{a})^3,$$

то формулы разности квадратов, суммы и разности кубов можно увидеть и в выражениях:

$$a - b = a^{\frac{2}{2}} - b^{\frac{2}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}), \quad \text{при} \quad a, b \geqslant 0;$$

$$a \pm b = a^{\frac{3}{3}} \pm b^{\frac{3}{3}} = (a^{\frac{1}{3}} \pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} \mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}). \tag{1.2}$$

Важно знать, как выделить полный квадрат в квадратном трехчлене ($a \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{1.3}$$

Пример 1.1. Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене:

1) $x^2 - 5x + 6 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$

2)

$$-x^2 + 8x - 7 = -(x^2 - 8x + 7) =$$
$$= -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + 7) = -[(x-4)^2 - 9] = 9 - (4 - x)^2.$$

Пример 1.2. Преобразовать данное уравнение к квадратному:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

Решение. Полагаем

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)=y.^{(}*)$$

Преобразуем первое слагаемое, исходя из нашей замены:

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)$$

Рассматривая $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ как

$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-2\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

подставляя в исходное уравнение и делая замену (*), имеем:

$$y^2-2y-3=0.$$

1.1.2 Многочлен $P_n(x)$ и его корень. Теорема Безу. Разложение многочлена на множители. Схема Горнера

Напомним, что одночленом называется произведение нескольких сомножителей, один из которых числовой (коэффициент), а другие — степени с буквенными основаниями (например, $3x^4y^2$).

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех букв, входящих в этот одночлен. Два одночлена называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Многочленом называется сумма нескольких одночленов (например, $3x^4y^2+x^2y^2+x^2y-1$).

Степенью многочлена называется наибольшая из степеней одночленов, образующих данный многочлен.

Разложить многочлен

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \tag{1.4}$$

на множители — значит заменить его тождественно равным ему произведением, то есть представить его в виде:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n), \tag{1.5}$$

или с учетом кратности корней:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}$$

где $k_1, k_2, \dots k_n$ — кратности корней.

Приведем примеры, иллюстрирующие три основных способа разложения многочленов на множители.

1. Разложение на множители путем вынесения общего множителя за скобки

Пример 1.3. $18x^3y^2 - 12x^4y - 24x^3yz = 6x^3y(3y - 2x - 4z)$.

Пример 1.4. $6a(2c-d) + 3b(d-2c) = 6a(2c-d) - 3b(2c-d) = 3(2c-d)(2a-b)$.

2. Разложение на множители многочлена методом группировки

Пример 1.5.

$$xy - zy - x + z - y + 1 = (xy - zy - y) - (x - z - 1) = \\ = y(x - z - 1) - (x - z - 1) = (x - z - 1)(y - 1).$$

Пример 1.6.

$$y^4 + y^2 - 2 = (y^4 - 1) + (y^2 - 1) = \\ = (y^2-1)(y^2+1) + (y^2-1) = (y^2-1)(y^2+2) = (y-1)(y+1)(y^2+2).$$

3. Разложение на множители многочлена с помощью формул сокращенного

умножения

Пример 1.7. $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

Пример 1.8.

$$4x^4 - 9 = (2x^2 + 3)(2x^2 - 3) = (2x^2 + 3)(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}).$$

Корни многочлена n-ой степени (1.4) можно найти с помощью следующей теоремы:

Теорема. 1.1 *Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

имеет целый корень, то он является делителем свободного члена a_0 многочлена $P_n(x)$.

Если путем подбора делителей свободного члена a_0 найти x_1 — корень многочлена n–ой степени $P_n(x)$, то многочлен (1.4) запишется в виде:

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \tag{1.6}$$

где $P_{n-1}(x)$ - некоторый многочлен степени $n - 1$.

Здесь уместно привести формулировку теоремы Безу.

Теорема. 1.2 (Безу) *Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - x_1)$ равен $P_n(x_1)$, т.е. значению многочлена при $x = x_1$.*

Многочлен $P_{n-1}(x)$ находят путем деления «углом» многочлена на многочлен (в нашем случае на одночлен), для этого надо:

1. расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;
2. разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен является первым членом частного;
3. первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4. чтобы получить следующий член частного, надо с первым остатком поступить так же, как поступили с делимым в п. 2 и 3.

Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого ниже степени делителя. Далее находят корни многочлена $P_{n-1}(x)$.

Следствие из теоремы Безу.

Многочлен делится на двучлен $(x - x_1)$ без остатка тогда и только тогда, когда число x_1 является корнем данного многочлена.

Пример 1.9. Найти остаток от деления многочлена

$$P_4(x) = x^4 + 15x^3 - 3x^+6 \text{ на } x + 3.$$

Решение. Будем искать остаток по теореме Безу.

$$P_4(-3) = (-3)^4 + 15(-3)^3 - 3(-3) + 6 = -39.$$

Проверить (самостоятельно) путем деления «углом» данного многочлена на $x+3$, что остаток будет равен -39.

Пример 1.10. Найти корень x_1 многочлена:

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24.$$

Найти $P_3(x)$ и записать $P_4(x)$=$(x - x_1) \cdot P_3(x)$.

Решение. Согласно теореме целый корень этого уравнения следует искать среди делителей свободного члена 24, т.е. среди чисел ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±24.

Путем подбора делителей свободного члена находим корень многочлена: $P_4(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 13 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 + 24 \neq 0$,

$$P_4(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 13(-1)^2 + 14(-1) + 24 = 0.$$

Таким образом $x_1 = -1$ — корень данного уравнения.

Многочлен $P_3(x)$ находят путем деления «углом» многочлена на одночлен $x+1$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -13x^2 & +14x & +24 & x+1 \\
\cline{6-6}
x^4 & +x^3 & & & & x^3-3x^2-10x+24 \\
\cline{1-2}
 & -3x^3 & -13x^2 & +14x & +24 & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -10x^2 & +14x & +24 & \\
 & & -10x^2 & -10x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 24x & +24 & \\
 & & & 24x & +24 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Ответ: $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$=$(x+1)(x^3-3x^2-10x+24)$.

Оказывается, в случае, когда делитель есть двучлен $(x-x_1)$, обычную схему деления «углом» можно значительно упростить в записи.

Это правило нахождения частного и остатка называется схемой Горнера и состоит в следующем: старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Для получения каждого следующего коэффициента частного нужно соответствующий коэффициент делимого сложить с предыдущим коэффициентом частного, умноженным на число x_1.

Остаток вычисляется аналогично: нужно свободный член делимого сложить со свободным членом частного, умноженным на число x_1. Эти вычисления обычно записываются с помощью таблицы:[1]

коэффициенты делимого						
	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
x_1	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + x_1 b_{n-1}$	$\ldots$	$b_1 = a_2 + x_1 b_2$	$b_0 = a_1 + x_1 b_1$	$R = a_0 + x_1 b_0$
	коэффициенты частного					остаток

Пример 1.11. Для того же многочлена, что и в предыдущем примере: $P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ найти $P_3(x)$, зная корень $x_1 = -1$, и записать $P_4(x) = (x - x_1) \cdot P_3(x)$.

Решение. Составим таблицу схемы Горнера:

коэффициенты делимого					
	$a_4 = 1$	$a_3 = -2$	$a_2 = -13$	$a_1 = 14$	$a_0 = 24$
-1	1	-3	-10	24	$R = 0$
	коэффициенты частного				остаток

Ответ: $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24)$.

[1] Алгоритм Горнера деления многочленов легко запрограммировать, поэтому он применяется в компьютерных программах, реализующих аналитические вычисления.

Когда $n = 2$, то есть $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен, имеем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$=0, которые находятся по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.7}$$

При решении приведенных квадратных уравнений

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

корни x_1, x_2 находят обычно по теореме Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \; x_1 + x_2 = -\frac{c}{a}. \tag{1.8}$$

1.1.3 Арифметические корни и их свойства

Корнем n-ой степени (или арифметическим корнем n-ой степени) из положительного числа a называется единственное положительное решение уравнения $x^n = a$.

При любом a и натуральном n справедливы равенства:

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, \quad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

В частности, $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$.

Если m — целое, n — натуральное (т.е. $m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}$), то для любого $a > 0$ справедливо

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Для любых натуральных m, n и любых $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ справедливы:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}} \ \text{ и } \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ \ (\text{при } b \neq 0);$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}. \tag{1.10}$$

Наконец, если $0 \leqslant a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Следующая формула называется формулой сложного радикала:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}}, \tag{1.11}$$

где $a > 0,\ \ b > 0$ и $a^2 > b$, а знаки в правой и левой части одновременно берутся верхние, либо нижние (соответственно).

1.1.4 Степени и их свойства.

Для любых действительных m и n и любых $a>0,\ b>0$ справедливы равенства:

$$a^0=1;\quad a^1=a;\quad 1^m=1; \tag{1.12}$$

$$a^{m+n}=a^m\cdot a^n;\quad a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n};\quad (ab)^m=a^m\cdot b^m; \tag{1.13}$$

Пример 1.12. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}.$$

Решение. Для того, чтобы в данном выражении освободиться от иррациональности в знаменателе, необходимо числитель и знаменатель умножить на выражение сопряженное знаменателю:

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}+\sqrt{8})}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{5-8}=-2(\sqrt{5}+\sqrt{8}).$$

Ответ: $-2(\sqrt{5}+\sqrt{8})$.

Пример 1.13. Упростить выражение.

$$\frac{(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\frac{(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}})^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ): $a > 0;\ b > 0.$

1. $\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left((a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{5}};$

2. $\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3 = \left(a^{\frac{4}{5}}\right)^3 = a^{\frac{12}{5}};$

3. $\frac{a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{12}{5}}} = a^{\frac{2}{5}-\frac{12}{5}} = a^{-\frac{10}{5}} = a^{-2}.$

4. $(\sqrt{a\ \sqrt[3]{a^2b}})^4 = (\sqrt{\ \sqrt[3]{a^3a^2b}})^4 = (\sqrt[6]{a^5b})^4 = (\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[6]{b})^4 = a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{2}{3}}.$

5. $(\ \sqrt[4]{a\sqrt{b}}\ )^6 = (\ \sqrt[4]{\ \sqrt{a^2b}}\ )^6 = (\sqrt[8]{a^2b})^6 = (a^{\frac{2}{8}})^6(b^{\frac{1}{8}})^6 = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}.$

6. $\frac{a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{10}{3}-\frac{3}{2}}\,b^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{11}{6}}\,b^{-\frac{1}{12}}.$

7. $a^{-2}\,a^{\frac{11}{6}}\,b^{-\frac{1}{12}} = a^{-\frac{1}{6}}\,b^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{b}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}.$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$, при $a > 0;\ b > 0$.

Пример 1.14. Вычислить: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что:

$$27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2;\quad 27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2.$$

Тогда

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=$$
$$=\left|\sqrt{2}+5\right|+\left|\sqrt{2}-5\right|=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$$

Ответ: 10.

Пример 1.15. Вычислить $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Подкоренные выражения не являются полными квадратами, т.е. применить прием из предыдущего примера не удается. Возведем вычисляемое выражение в квадрат:

$$\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})}+29+12\sqrt{5}=$$

$$= 58 - 2\sqrt{841 - 144 \cdot 5} = 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 22 = 36.$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} < \sqrt{29 + 12\sqrt{5}},$$

то это выражение отрицательно

Ответ: -6.

Пример 1.16. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2} + 57\right|}$ является целым числом. Найдите это число.

Решение. Обозначим

$$A = \sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2} + 57\right|}.$$

Поскольку

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2} + 57\right|} > \sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|},$$

то A — отрицательное (и целое по условию) число. Далее находим A^2, учитывая, что

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}.$$

Получаем, что $A = -10$.

Ответ: -10.

Пример 1.17. Вычислить $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=x$. Тогда,

$$x^3=40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt{20-\sqrt{392}}).$$

Подставляя x вместо выражения в скобках, получим

$$x^3=40+3x\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}.$$

Отсюда $x^3-6x-40=0$. Это уравнение имеет один действительный корень: $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Пример 1.18. Упростить выражение:

$$\frac{a}{a^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2}.$$

Решение. Заметим, что $a\neq 0$, тогда:

$$Y(a) = \frac{a}{a^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+1}\sqrt{\frac{4a^2+a^4-2a^2+1}{4a^2}} =$$

$$= \frac{a}{a^2+1}\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2}} = \frac{a}{a^2+1}\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{4a^2}} = \frac{a}{a^2+1}\cdot\frac{a^2+1}{2|\,a\,|} = \frac{a}{2|a|}$$

Так как $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$. Далее по определению модуля действительного числа имеем:

$$Y(a) = \begin{cases} \frac{a}{2a}, & a > 0, \\ \frac{a}{2(-a)}, & a < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y(a) = \begin{cases} 0.5 \text{ если } & a > 0, \\ -0.5 \text{ если } & a < 0. \end{cases}$$

Ответ: $0.5\,$; если $a > 0$; -0.5 если $a < 0$.

Пример 1.19. Упростить выражение:

$$\left[\frac{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x-\sqrt{x^2-1}} + \frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+1}\right] : \frac{\sqrt{x}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0,\; x^2-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\, -1) \cup (1;\, \infty).$$

Обозначим

$$A = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) : \sqrt{x^2-1} =$$

$$= \left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2} + \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)^2}{(\sqrt{x^2-1})^2-x^2}\right] : \sqrt{x^2-1} =$$

$$= \left[(x+\sqrt{x^2-1})^2 - (\sqrt{x^2-1}-x)^2\right] : \sqrt{x^2-1} =$$

$$= 4x\sqrt{x^2-1} : \sqrt{x^2-1} = 4x.$$

Ответ: $4x$ при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty)$.

Пример 1.20. Упростить выражение:

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-2}.$$

Решение. ОДЗ:

$$x \neq 0, \quad x^2-1 \geqslant 0, \quad x^4-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty).$$

При решении задач на упрощение иррациональных алгебраических выражений часто применяют способ замены младших степеней переменных какими-либо новыми переменными (понижение степени выражения). При этом должно получиться более простое алгебраическое выражение относительно новых переменных. Упростив полученное выражение, следует вернуться к выражению с прежними переменными.

Обозначим $y = x^2$, тогда

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1})\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-2}=$$

$$=2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})^2}=\frac{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\cdot\sqrt[3]{y}}{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{x^2}$ при $x\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\,\infty)$.

1.2 Вопросы для самоподготовки

1. Записать формулы сокращенного умножения.
2. Что называется одночленом и как определяется его степень?
3. Дать определение многочлена. Как определяется степень многочлена?
4. Как выделить полный квадрат в квадратном трехчлене?

5. Разложение многочлена на множители.
6. Как следует искать корень уравнения среди делителей его свободного члена?
7. Описать схему деления "углом"многочлена на одночлен.
8. Правило нахождения частного и остатка по схеме Горнера.
9. Арифметические корни и их свойства. Формула сложного радикала?
10. Степени и их свойства.

1.3 Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

№	Задание	Варианты ответов
1	Упростить выражение: $(m-4)^2-(3-m)^2$	1. $14m-7$; 2. $7+2m$ 3. $2m$; 4. $2m-7$; 5. правильный ответ не указан.

Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

№	Задание	Варианты ответов
2	Разложить на множители $9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$	1. $(3x-2y-1)(3x+2y-1)$; 2. $(3x-2y)(3x+2y)$; 3. $(3x+2y-1)^2$; 4. $(3x-2y+1)(3x+2y+1)$ 5. правильный ответ не указан.
3	Упростить выражение: $\sqrt{(m-n)^2} - \sqrt{9m^2}$, если $m < 0 < n$	1. $2m+n$; 2. $-n+2m$; 3. $n-4m$; 4. $4m+n$; 5. правильный ответ не указан.
4	Упростить выражение: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}$	1. $2\sqrt{2}$; 2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 4. $2\sqrt{3}$; 5. правильный ответ не указан.
5	При каких значениях k и p корнями уравнения $kx^2 + px + 3 = 0$ являются числа и -3?	1. $k=1;\ p=2$; 2. $k=-1;\ p=-2$; 3. $k=-1;\ p=2$; 4. $k=1;\ p=-2$; 5. правильный ответ не указан.

Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

№	Задание	Варианты ответов
6	Упростить выражение: $\frac{(x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}xy^{-1.6}}{(x^{0.5}y^{-\frac{1}{5}})^3}$	1. $\frac{1}{xy}$; 2. $x^{-2}y^{-2.2}$; 3. xy^{-3}; 4. $\frac{x}{y}$; 5. правильный ответ не указан.
7	Вычислить: $\frac{\sqrt[4]{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$	1. $\sqrt{3}$; 2. 1; 3. 3; 4. $\frac{1}{3}$; 5 .правильный ответ не указан.
8	Освободиться от иррациональности в знаменателе: $\frac{14}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$	1. $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$; 2. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; 3. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; 4. $2(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$; 5. правильный ответ не указан.
9	Упростить выражение: $\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}$	1. $x^{17/24}$; 2. $x^{17/25}$; 3. $x^{11/24}$; 4. $x^{7/24}$; 5. правильный ответ не указан.

Тесты по теме «Преобразование алгебраических выражений»

№	Задание	Варианты ответов
10	Выделить полный квадрат в трехчлене $x^2 + 6x + 13$	1. $(x+3)^2+4$; 2. $(x+1)^2+4$; 3. $(x+3)^2+5$; 4. $(x+4)^2+1$; 5. правильный ответ не указан.

1.4 Задачи для самостоятельной работы

1. Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене

а) $-2x^2 + 4x + 7$;

б) $x^2 - 11x + 30$.

2. Разложить на множители

а) $x^3 - x^2 - 8x + 12$;

б) $2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

4. Упростить

$$\sqrt{x + 6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-9}}.$$

5. Упростить

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a} - 4\sqrt{a^{-1}}} - \frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{64a}}\right)^{-2} - \sqrt{a^2 + 8a + 16}.$$

6. Упростить $\sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{4x^{-1}} - 2} + \sqrt{\frac{1}{4x^{-1}} + \frac{2^{-2}}{x} + \frac{1}{2}}$.

7. Упростив левую часть, найти x:

$$\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3}{a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}+\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3}{a-b-\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}=\frac{2x-3}{3x+1}.$$

8. Упростить:

$$\frac{\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\frac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\frac{1}{b}}},$$

где $0<b<1$.

9. Упростить выражение и вычислить его при данных значениях параметров $x=23, y=1,32:$

$$\left[\frac{2\sqrt[4]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt{2}}+\frac{xy-\sqrt[4]{2}}{2xy+2\sqrt[4]{2}}\right]\cdot\frac{2xy}{xy+\sqrt[4]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[4]{2}}+4.1.$$

10. Проверить, что число $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

11. Доказать, что если $x=4(a-1)$ и $1<a<2$, то

$$(a+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}+(a-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2-a}.$$

1.5 Варианты проверочной работы

Вариант 1.

a) Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}.$$

b) Сократить дробь

$$\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^3+9x^2+26x+24}.$$

Вариант 2.

a) Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}.$$

b) Упростить выражение:

$$\frac{1}{m+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}}}:\frac{1}{m+\dfrac{1}{n}}-\frac{1}{n(mnp+m+p)}.$$

Вариант 3.

a) Доказать равенство:

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \quad + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1).$$

b) Упростить выражение:

$$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-2x+x^2)^{-1}].$$

Вариант 4.

a) Вычислить $\sqrt{6-\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$.
b) Упростить выражение:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2 + bx + 3}{x(\sqrt{b}+\sqrt{3x^{-1}})^2}.$$

Вариант 5.

a) Вычислить $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.
b) Упростить выражение: $\dfrac{|x-1|(x^2+x+2)(x+1)\cdot x}{x^3-1-|x-1|}$.

Вариант 6.

a) Найти x, если

$$49^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{2.5} = 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49 \cdot x^{0,5}.$$

b) Упростить выражение:

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{a}\right)}.$$

1.6 Ответы по теме преобразование алгебраических выражений

Тесты

№	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10
Ответ	5	4	1	5	2	2	3	4	1	1

Таблица 2. Ответы к тестам

Задачи для самостоятельной работы

1. а) $9-2(x-1)^2$; б) $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$;
2. а)$(x-2)^2(x+3)$; б) $2(x-6)(x-4)$;
3. 2;
4. $2\sqrt{x-9}$, если $x \geqslant 18$; 6, если $9 \leqslant x \leqslant 18$;
5. $4\sqrt{a}$ при $a>0$,$a \neq 4$;
6. $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$при$? \in [4;\infty)$; $\frac{5}{2\sqrt{x}}$ при $x \in (0;\,4)$;
7. $x=-\frac{5}{4}$.
8. $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$.
9. 4.1.

Варианты проверочной работы

1. $\frac{1}{6}(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})$;
2. $x+1$;
3. $\frac{1}{23}(\sqrt{3+}\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})$;
4. 1;
5. x;
6. $\sqrt{2}+1$;
7. 1;
8. $5+3\sqrt{2}$;
9. $-x(x+1)$ при $x \in (-\infty;1)$; x^2+x+2 при $x \in (1;\infty)$;
10. 49;
11. 2 при $0<a<1$; $\frac{2}{3}$ при $a>1$.

2 Комплексные числа

2.1 Теоретические основы темы и решение типовых задач

Введение комплексных чисел связано с неразрешимостью в области вещественных чисел операции извлечения корня четной степени из отрицательных чисел.

Рассмотрим простейший случай: $x^2+1=0$ или $x^2=-1$. Число, квадрат которого равен -1 называют мнимой единицей, его обозначают буквой i . Тогда $i^2=-1$ и $i=\sqrt{-1}$.

2.1.1 Комплексные числа в алгебраической форме

Комплексным числом называется выражение вида

$$z=a+i\,b, \tag{2.1}$$

(a и b — действительные числа, i — мнимая единица), если для любых комплексных чисел $z_1=a_1+b_1\,i$ и $z_2=a_2+b_2\,i$ введены операции по следующим правилам:

1. два комплексных числа $z_1=a_1+b_1\,i$ и $z_2=a_2+b_2\,i$ называются равными, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$;

2. суммой и разностью двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1\,i$ и $z_2=a_2+b_2\,i$ называется комплексное число:

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i. \tag{2.2}$$

3. произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1\, i$ и $z_2 = a_2 + b_2\, i$ называется комплексное число:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \tag{2.3}$$

Степени числа i **:** так как

$$i^1 = i, \;\; i^{\,2} = -1, \;\; i^{\,3} = i^{\,2} \cdot i = -i, \;\; i^{\,4} = (i^{\,2})^2 = 1,$$

то

$$i^{\,4n+1} = i, \quad i^{\,4n+2} = -1, \quad i^{\,4n+3} = -i, \quad i^{\,4n} = 1, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Запись комплексного числа в виде: $z = a + i\, b$ называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа, где a — действительная часть числа z и обозначается Rez , а b — мнимая часть числа z и обозначается Imz . Тогда комплексное число можно записать как $z = a + i\, b = Rez + iImz$.

Любое действительное число a содержится во множестве комплексных чисел, его можно записать так: $a = a + 0i$.

Числа $0,\ 1,\ i$ записываются соответственно в виде $0 = 0 + 0i$, $1 = 1 + 0i$, $i = 0 + 1i$.

Если $a = 0$, комплексное число $z = a + bi$ обращается в чисто мнимое число bi. Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ (отличается только знаком мнимой части) называется комплексно сопряженным с числом $z = a + bi$. Комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют число $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$|\,z\,| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.5}$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число: $|\,z\,| \geqslant 0$, причем $|\,z\,| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Из определения модуля комплексного числа следует, что для любых комплексных чисел z, z_1, z_2 справедливы соотношения:

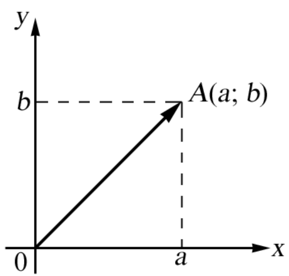

Рис. 2.1.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}, \text{если } z_2 \neq 0 \tag{2.6}$$

для любого целого числа n (при $n < 0$ предполагается, что $z \neq 0$).

Геометрический образ комплексного числа $z = a+bi$. Комплексное число $z = a + bi$ изображают на координатной плоскости точкой с декартовыми координатами $(a,\ b)$ (рис.2.1).

Действительные числа a изображаются точками оси x -ов. Чисто мнимые числа ib — точками оси y -ов.

Ось x -ов — действительная ось. Ось y -ов — мнимая ось. Точка $A(a, b)$, соответствующая комплексному числу $z = a + bi$ называется *аффиксом* данного комплексного числа.

Каждой точке плоскости с координатами (a, b) соответствует один и только один вектор с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $A(a, b)$. Поэтому комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + bi$

Пример 2.1. Записать аффиксы следующих комплексных чисел и построить соответствующие им радиусы-векторы:

Решение.

1. $z = 2$;
2. $z = -3$;
3. $z = 3\,i$;
4. $z = -2\,i$;
5. $z = 2 + 3\,i$.

1. M_1 (2, 0);
2. M_2 (-3, 0);
3. M_3 (0, 3);
4. M_4 (0, -2);
5. M_5 (2,3)

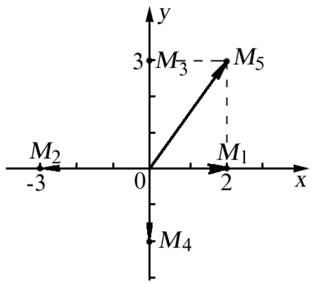

Рис. 2.2.

Пример 2.2. Найти множество точек, для которых $Rez < -2$.

Решение. Точки искомого множества удовлетворяют неравенству $a < -2$, т.к. $Rez = a$ (рис. 2.3):

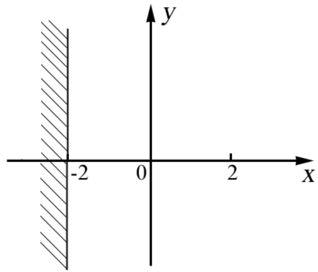

Рис. 2.3.

Пример 2.3. Найти корни уравнения $x^2 - 2x + 17 = 0$.

Решение. По известной формуле имеем:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i,$$

т.е.

$$x_1 = 1 + 4i, \quad x_2 = 1 - 4i.$$

Ответ: $x_1 = 1 + 4i, \quad x_2 = 1 - 4i.$

Пример 2.4. Найти сумму $z_1 + z_2$, если:

a) $z_1 = 2 - \ i$ и $z_2 = -3 + 2\,i$
b) $z_1 = 5 + 3\,i$ и $z_2 = 2 - i$.

Решение.
a) $z_1 + z_2$ = $(2 - i\ ) + (-3 - 2i\,) = -1 + i$.

Ответ: $-1 + i$.

b) $z_1 + z_2$ = $(5 + 3i\ ) + (2 - i) = 7 + 2i$.

Ответ: $7 + 2i$.

Пример 2.5. Найти разность $z_1 - z_2$, если $z_1 = 5 + 3\,i$ и $z_2 = 2 - \ i$

Решение. $z_1 - z_2$ = ($5 + 3\,i$) - ($2 - \ i$) = $3 + 4i$.

Ответ: $3 + 4i$.

Пример 2.6. Найти $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - \ i\ z_2 = -3 + 2\,i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2$ =($2 - \ i$) $(-3 + 2\,i\,)$= $-4 + 7i$.

Ответ: $-4 + 7i$.

Пример 2.7. Найти $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 3 - \ i \ z_2 = 2 + 3 \ i$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - i}{2 + 3i} = \frac{(3 - i)(2 - 3i\ )}{(2 + 3i\ )(2 - 3i\ )} = \frac{3 - 11i}{13}.$$

Ответ: $\frac{3 - 11i}{13}$.

2.1.2 Комплексные числа в тригонометрической форме

Комплексное число $z = a + b\ i$ изображается в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + b\ i$. Угол φ

между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z \neq 0$ (рис. 2.4): Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по движению часовой стрелки — отрицательной. Аргумент φ комплексного числа $z = a + b\ i$ записывается так: $\varphi = \mathrm{Arg} z$ или $\varphi = \mathrm{Arg}\ (\ a + bi.)$

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент комплексного числа определяется однозначно, если область его изменения ограничить промежутком величины $2\ \pi$. В качестве такого промежутка принято брать один из следующих промежутков: $[0,\,2\pi]$, $[-\pi,\,\pi]$. Такое значение аргумента z называется главным значением аргумента $\arg z$. Так как аргумент z определяется с точностью до слагаемого $k\cdot 2\pi$, то:

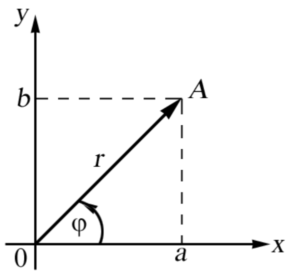

Рис. 2.4.

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad . \tag{2.7}$$

Из рисунка видно, что

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \tag{2.8}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, r \geqslant 0, \quad \frac{b}{a} = tg\varphi, \quad \varphi = Arg\, z = \mathrm{Arctg}\frac{b}{a}.$$

Запишем формулы для вычисления главного значения аргумента, принадлежащие промежутку $[0,\,2\pi]$:

$$\arg\, z = \arg(a+bi) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}, & a>0, b\geqslant 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & a=0, b>0; \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0, b<0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a=0, b<0; \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}+2\pi, & a>0, b<0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Для представления комплексного числа $z=a+b\,i$ в тригонометрической форме необходимо найти:

1) модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; изобразить точку $a+b\ i$ и выбрать нужное значение аргумента этого числа;

2) записать $z = a + b\ i$, воспользовавшись соотношением (2.8).

Получаем :

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.10}$$

Данное выражение является *тригонометрической формой представления комплексного числа.*

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

При умножении двух или нескольких чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{2.11}$$

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1\ )}{r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1-\varphi_2\ )) \tag{2.12}$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени, т.е.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\ ))^n = r^n(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi\ ), \tag{2.13}$$

где $n \in \mathbb{N}$. Эта формула называется формулой Муавра.

Корень n -ой степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\ )$$

имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{2.14}$$

где k = 0,1,2,. . . , n -1.

Пример 2.8. Записать комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме**.**

Решение. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме нужно знать его модуль и аргумент, по формуле (2.5) находим:

$$|\, z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Затем подсчитываем главное значение аргумента $z = 1 + i\sqrt{3}$. Вещественная и мнимая части данного комплексного числа положительны ($a = 1,\ b = \sqrt{3}$). По формуле (2.9) главное значение аргумента совпадает с $\arg z = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Тогда $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Пример 2.9. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -5$.

Решение. Данное число является вещественным и отрицательным, а главное значение его аргумента (см. формулу (2.9)) равно π . Подсчитаем модуль числа –5:

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Модуль и аргумент числа –5 найдены, по формуле (2.7) - (2.9) имеем: $z = -5 = 5\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$.

Ответ: $z = -5 = 5\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$.

Пример 2.10. Найти аргумент числа $z = -3 - i\sqrt{3}.$

Решение. Вещественные и мнимые части данного числа отрицательны и по формуле (2.9) главное значение аргумента его совпадает с

$$arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg\frac{-\sqrt{3}}{-3} + \pi = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi.$$

Следовательно, $Arg\left(-3 - i\sqrt{3}\right) = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n$.

Пример 2.11. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, где

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Решение. $z_1 \cdot z_2$ = $2 \cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right)$ = $= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3\,i\sqrt{2}$.

Ответ: $z_1 \cdot z_2$ = $3\sqrt{2} + 3\,i\sqrt{2}$.

Пример 2.12. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, где

$$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Решение. $z_1 \cdot z_2$ = $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $z_1 \cdot z_2$ = $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.13. Найти частное чисел z_1 и z_2 , где

$$z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. $z_1 : z_2$ = $\frac{10}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ = $= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0+i) = 5i$.

Ответ: $z_1 : z_2 = 5i$.

Пример 2.14. Найти z^6 , где $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Возводим в шестую степень z , согласно (2.13):

$$z^6 = 2^6\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right)^6 = 2^6\left[\cos\left(6\cdot\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\tfrac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2^6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2^6(-1 + i\cdot 0) = -2^6 .$$

Ответ: $z^6 = -2^6$.

Пример 2.15. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Поскольку $1 = \cos 0 + i\ \sin 0$, то $\sqrt[3]{1}$ состоит из чисел

$$z_k \quad = \quad \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$ (см. формулу (2.14)). Задаем

$$k = 0, \text{ получим } \quad z_0 = \cos 0 + i\ \sin 0 = 1;$$

$$k = 1, \text{получим } \quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 2 \quad ,\text{получим} \quad z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\ \sin\frac{4\pi}{3} \quad = \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ответ: $z_0 = 1$; $z_1 = = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Пример 2.16. Найти $\sqrt[3]{-i}$.

Решение. Поскольку $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}$, то $\sqrt[3]{-i}$ состоит из чисел

$$z_k \quad = \quad \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

Задаем $k = 0, 1, 2$. Получаем $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2} = i$,

$$z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\ \sin\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\ \sin\frac{11\pi}{6} \quad = \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Ответ: $z_0 = i$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Отметим, что точки плоскости z_0, z_1, z_2 (см. рис.2.5.) являются вершинами правильного треугольника. Это не случайно - для любого $z \neq 0$ и любого $n > 2$ корни степени n из числа z являются вершинами правильного n - угольника с центром в нуле (рис.2.5):

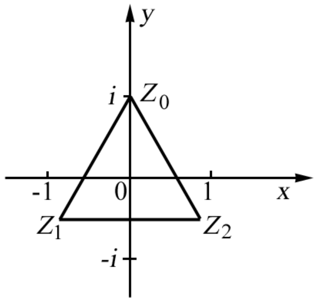

Рис. 2.5.

2.2 Задачи более сложного типа

Пример 2.17. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен один из его корней $x_1 = 1 - 3i$.

Решение. Если x_1 - корень уравнения с действительными коэффициентами, то и $x_2 = \bar{x}_1 = 1 + 3i$ - тоже корень этого уравнения. Тогда левая часть квадратного уравнения раскладывается на множители

$$(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = (x - (1 - 3i))(x - (1 + 3i)) =$$
$$= ((x - 1) + 3i)((x - 1) - 3i) =$$
$$= (x - 1)^2 + 3^2 = x^2 - 2x + 10,$$

т.е. искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 2x + 10 = 0$. Этот же результат можно получить, производя решение по формуле Виета.

Ответ: $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Пример 2.18. Решить уравнение $(-5 + 2i)x - (3 - 4i)y = 2 - i$.

Решение. Так как два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1\ i$ и $z_2 = a_2 + b_2\ i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то преобразуем наше уравнение к виду

$$(-5x - 3y) + i(2x + 4y) = 2 - i, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} -5x - 3y = 2, \\ 2x + 4y = -1. \end{cases} \text{ решая, получаем } \begin{cases} x = -\frac{5}{14}, \\ y = -\frac{1}{14} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{5}{14}; \quad y = -\frac{1}{14}.$

Пример 2.19. Изобразить множества точек, для которых выполняются заданные условия: $-1 < Rez \leqslant 3$.

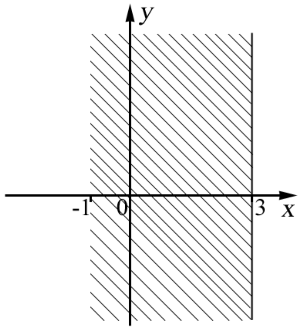

Рис. 2.6.

Решение. Поскольку $z = a + i\,b = Rez + iImz$, имеем $-1 < a \leqslant 3$. Действительные числа a изображаются точками оси абсцисс (рис. 2.6.), значит, мы имеем область — вертикальную полосу, ограниченную прямыми: $x = -1$ и $x = 3$ (точки прямой $x = -1$ в область не входят, поэтому эта прямая изображена пунктиром):

Пример 2.20. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sqrt{2} < |\,(1-i)z - i\,| < 2\sqrt{2}.$$

Решение. Поскольку $z = a + i\,b$, имеем

$$(1-i)z - i = (a + i\,b)(1-i) - i = (a+b) + (b-a-1)i.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа

$$|(a+b) + (b-a-1)i| = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a-1)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2a - 2b + 1}.$$

По условию

$$\sqrt{2 <} \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2a - 2b + 1} < 2\sqrt{2},$$

или

$$2 < 2a^2 + 2b^2 + 2a - 2b + 1 < 8,$$

$$1 < a^2 + b^2 + a - b + 0,5 < 4.$$

Выделяя полные квадраты по a и b , получим:

$$1 < (a + 0,5)^2 + (b - 0,5)^2 < 4.$$

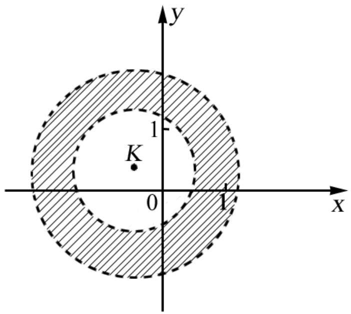

Рис. 2.7.

Это неравенство представляет собой внутренность кольца (рис.2.7.), т.к. левая часть двойного неравенства — область лежащая вне круга радиусом 1 с центром в точке $C(-0,5;0,5)$, правая часть — круг с центром в точке C и радиусом равным 2 (границы окружностей в область не входят, поэтому они изображены пунктиром).

Пример 2.21. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z = 2 + \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Решение. Имеем

$$|\,z\,| = \sqrt{(2+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{4 + 4\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{5 + 4\cos\alpha}.$$

Анализируя полученное $|z| = \sqrt{5+4\cos\alpha}$ делаем вывод, что наибольшее значение модуля z равно $\sqrt{9}=3$ (при $\alpha=0$), а наименьшее значение $|z|$ равно $\sqrt{5-4}=1$ (при $\alpha=\pi$).

Ответ: наибольшее значение $|z|$ = 3 (при $\alpha=0$), а наименьшее значение $|z|$ = 1 (при $\alpha=\pi$).

Пример 2.22. Решить неравенство: $1+\log_{0,5}\frac{|a+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\geqslant 0$ (*)

Решение. ОДЗ :

$$\frac{|a+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\geqslant 0$$

отсюда $|a+1+2i|>2$, находя модуль, имеем $(a+1)^2+4>4$ или $(a+1)^2>0$, тогда $a\neq -1$.

Из (*) имеем $\log_{0,5}\frac{|a+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\geqslant -1$, по определению $\frac{|a+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\leqslant 2$. Из последнего неравенства имеем: $|a+1+2i|\leqslant 2\sqrt{2}$, преобразовывая, получаем $(a+1)^2+4\leqslant 8$, т.е. $(a+1)^2\leqslant 4$ или $-2\leqslant(a+1)\leqslant 2$, окончательно $-3\leqslant a\leqslant 1$.

При условии $a\neq -1$ получаем, что неравенству (*) удовлетворяет множество [-3;1) ∪ (-1;1].

Ответ: [-3;1) ∪ (-1;1].

2.3 Вопросы для самоподготовки

1. Какое число называется мнимой единицей?
2. Комплексные числа в алгебраической форме.
3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Геометрический образ комплексного числа.
5. Комплексные числа в тригонометрической форме.
6. Какое значение аргумента называется главным?
7. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.
8. Записать формулу, по которой осуществляется возведение комплексного числа в целую положительную степень.
9. Записать формулу, по которой находится корень n -ой степени из комплексного числа.
10. Вершинами чего являются корни степени n из числа z ?

2.4 Тесты по теме комплексные числа

Тесты по теме комплексные числа

№	Задание	Варианты ответов
1	Вычислить: $(2-i)^3 \cdot (2+11i)$	1. 123 ; 2. 125 ; 3. 100 ; 4. $125i$ 5.правильный ответ не указан
2	Решить на множестве комплексных чисел уравнение: $4x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$	1. $\pm 3i \pm \sqrt{6}i$; 2. $\pm 6i \pm 3$; 3. $\pm 2i$, $\pm \sqrt{6}i$; 4. ± 3 , $\pm 2i$; 5. правильный ответ не указан
3	Решить на множестве комплексных чисел уравнение: $x^4 + 15x^2 + 54 = 0.$	1. $\pm 6i$, ± 3 ; 2. $\pm 2i$, $\pm \sqrt{6}i$; 3. $\pm 3i$, $\pm \sqrt{6}i$; 4. ± 3 , $\pm 2i$; 5. правильный ответ не указан
4	Вычислить: $i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18}$	1. i ; 2. 0 ; 3. $-i$; 4. -6 ; 5. правильный ответ не указан

Тесты по теме комплексные числа

№	Задание	Варианты ответов
5	Вычислить сумму: $$(2-i\ )+(3+2i)$$	1. $-5-i$; 2. $-5+i$; 3. $5-i$; 4. $5+i$; 5. правильный ответ не указан
6	Вычислить произведение: $$z_1 = 2-3i$$ и $$z_2 = 1+4i$$	1. 6 ; 2. $i+6$; 3. $6i$; 4. $-6i$; 5. правильный ответ не указан
7	Найти частное: $$z_1 = 2-3i \text{ и } \quad z_2 = 1+4i$$	1. $-\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i$ 2. $-\frac{2}{3}i$; 3. $6i$; 4. $-i$; 5. правильный ответ не указан

Тесты по теме комплексные числа

№	Задание	Варианты ответов
8	Найти частное: $$\frac{1-i}{1+i}$$ в виде $$z=a+b\,i$$	1. $6i$; 2. $-7i$; 3. $-i$ 4. $-6-7i$; 5. правильный ответ не указан
9	Вычислить произведение: $$(3-i)\cdot(2+3i\,)$$	1. $1-6i$; 2. $1-7i$; 3. $2-i$; 4. $9+7i$; 5. правильный ответ не указан
10	Вычислить: $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}$$	1. $(-i)^{20}$ 2. $(-1)^{20}$; 3. 2^{20} ; 4. 1; 5. правильный ответ не указан

2.5 Задачи для самостоятельной работы

Выполнить действия:

1. $(5-4i\,)+(7+2i)$;

2. $(5-4i)+(7+4i)$;
3. $(-6+2i)+(-6-2i)$;
4. $(1-i)-(7-3i)+(6-2i)-(2+i)$;
5. $(-2-i)\cdot(1+i)$;
6. $(5-4i)\cdot(3+2i)$;
7. $\frac{1}{1-i}$;
8. $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$;
9. $\frac{3-2i}{1+3i}$;
10. Найдите модуль и аргумент числа $\frac{8+2i}{5-3i}$;
11. Представить в алгебраической форме число

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

12. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, где

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad z_2=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

13. Найти частное чисел z_1 и z_2 , где $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;
14. Возвести в степень $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$;
15. Извлечь корень $\sqrt{i}$;
16. Решить на множестве комплексных чисел уравнение:

$$4x^2 - 8x + 13 = 0;$$

17. Выполнить действия: $\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$;

18. Найти мнимую часть комплексного числа $z = \frac{3-2i}{1-4i} + i^9$.

19. Найти действительную часть комплексного числа $z = \frac{(2-i)^3}{3+4i}$.

20. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $2 \leqslant |\, z - 2 - i \,| \leqslant 3$, $0 \leqslant Imz < 3$.

21. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $|\, z \,| < 2$.

22. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

23. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $Im\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}\right) \geqslant 1$.

2.6 Варианты проверочной работы по теме: «Комплексные числа»

Вариант 1.

Найдите модуль и аргумент числа $\frac{5+i}{2+3i}$.

Решить на множестве комплексных чисел уравнение:

$$x^2 + 6x + 34 = 0.$$

Вариант 2.
Выполните действия: $\frac{4+3i}{3-4i} - \frac{5-4i}{4+5i}$.
Решить на множестве комплексных чисел уравнение:

$$x^4 - 2x^2 + 4 = 0.$$

Вариант 3.
Найти действительную часть комплексного числа

$$z = \frac{(1-2i)^3}{i} + 4i^{16}.$$

Решить на множестве комплексных чисел уравнение:

$$x^4 - 4x^2 + 16 = 0.$$

Вариант 4.
Выполните действия: $\frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}$.
Считая x и y действительными числами, решить уравнение

$$\frac{2+5i}{x-y} - \frac{1-3i}{x+y} = \frac{-7x+12i}{y^2-x^2}.$$

Вариант 5.
Выполните действия: $(2(1-i)^3 + \frac{31-17i}{4-3i}\ )\,\frac{1+i}{6} - 1$.
Найти z^{12} , если $z = 2\bar{z} = 3 + i$.
Вариант 6.
Выполните действия: $\left(\frac{1}{3}(1-i)^4 + \frac{7-24i}{4-3i} + i\right)\frac{8}{(1+i)^2}$.
Найти z^6 , если $3 - z - \bar{z} = -4 + 8i$.

2.7 Ответы по теме «Комплексные числа»

Тесты										
№	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	2.5.	2.6.	2.7.	2.8	2.9	2.10
ответ	2	4	3	2	4	5	1	3	4	4

Задачи для самостоятельной работы

1. $12-2i$; 2. 12; 3. -12; 4. $-2-i$; 5. $-1-3i$; 6. $23-2i$; 7. $\frac{2}{2}+\frac{1}{2}i$; 8. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$; 9. $-0.3-1.1i$; 10. $|z|=\sqrt{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 11. $-1+i$; 12. $z=10\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; 13. $z=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; 14. $121.5(1+i\sqrt{3})$;

15. $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 16. $x_{1,2}=1\pm 1,5i$;

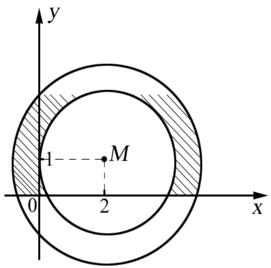

Рис. 2.8.

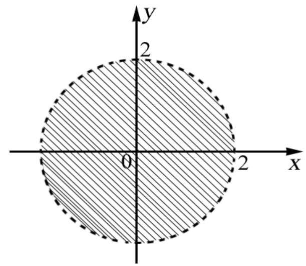

Рис. 2.9.

17. $2i$; 18. $Imz=\frac{27}{17}$; 19. $Rez=-1.52$;
20. *Рис. 2.8.* 21. *Рис. 2.9.* 22. *Рис. 2.10.* 23. *Рис. 2.11.*

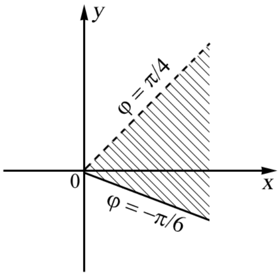

Рис. 2.10.

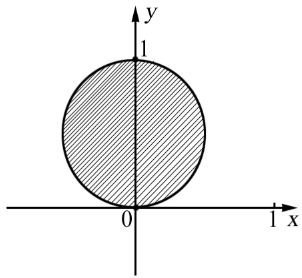

Рис. 2.11.

Ответы к вариантам проверочной работы

1. $|z| = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2. $x_{1.2} = -3 \pm 5i$; 3. $2i$;
4. $x_{1.2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $x_{3,4} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$; 5. $Rez = 6$; 6. $x_{1.2} = \sqrt{3} \pm i, x_{3,4} = -\sqrt{3} \pm i$; 7. $-0.72 + 3.46i$;
8. $x = -1, y = -2$; 9. 0 ; 10. -64; 11. $-8 - \frac{32}{3} i$; 12. $512i$.

3 Элементы векторной алгебры

3.1 Теоретические основы темы и решение типовых задач

3.1.1 Понятие вектора. Прямоугольная декартова система координат

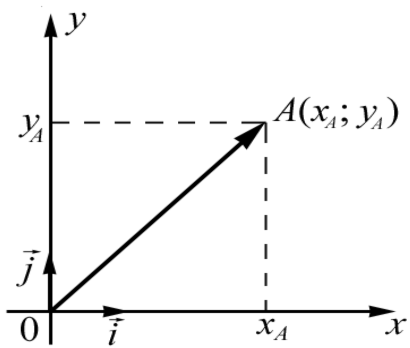

Рис. 3.12.

Величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, называются векторными.

Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление, называется *вектором.*

О всяком отрезке $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\vec{a}$ (получен приложением вектора $\vec{a}$ к точке A).

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом.*

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и имеют одинаковую длину.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется упорядоченная пара двух взаимно перпендикулярных координатных осей Ox и Oy (3.1). Точка O

— начало координат. Векторы $\vec{i},\vec{j}$ — *единичные векторы*, направленные вдоль осей Ox, Oy соответственно. Они называются базисными векторами прямоугольной системы координат (или ортами).

Проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ на координатные оси Ox и Oy, обозначим через x_A и y_A (3.1). Эти проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ называются его *координатами.*

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x;y)$ находятся по формулам:

$$x = x_2 - x_1\,;\; y = y_2 - y_1, \tag{3.1}$$

где точки A и B, имеют координаты соответственно $x_1; y_1$ и $x_2;\; y_2$.

Тот факт, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x;y)$ может быть записан так:

$$\overrightarrow{AB} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} \tag{3.2}$$

В этом случае говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ представлен в разложении по базису $\vec{i},\vec{j}$.

Расстояние между точками плоскости A и B, имеющими координаты соответственно $(x_1;y_1)$ и $(x_2;\;y_2)$, определяются по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3.3}$$

По этой же формуле определяется длина отрезка AB или модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Координаты $(x_{ср.}; y_{ср.})$ середины отрезка AB определяются по формулам:

$$x_{ср.} = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_{ср.} = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{3.4}$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$имеет координаты $(x;y;z)$, то есть, задана прямоугольная система координат в пространстве, его можно записать так:

$$\overrightarrow{AB}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k} \qquad (3.5)$$

то есть, вектор представлен в разложении по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей $Ox,\ Oy,\ Oz$ соответственно.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ $(x;y;z)$ находятся по формулам:

$$x=x_2-x_1\,;\ y=y_2-y_1\,;\, z=z_2-z_1, \qquad (3.6)$$

где точки $A,\ B$, имеют координаты соответственно $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$. Расстояние между точками A и B, имеющими координаты соответственно $(x_1;\ y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$, определяются по формуле:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (3.7)$$

По этой же формуле определяется длина отрезка AB или модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Координаты $(x_{ср.};\ y_{ср.}\,;\ z_{ср.})$ середины отрезка AB определяются по формулам:

$$x_{ср.}=\frac{x_1+x_2}{2}\quad;\quad y_{ср.}=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z_{ср.}=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (3.8)$$

В общем случае, модуль вектора $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$, заданного своими декартовыми координатами, находится по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (3.9)$$

Единичный вектор $\vec{a}_0$, со направленный с вектором $\vec{a}$, находится по формуле:

$$a_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{3.10}$$

Для операций сложения, вычитания и умножения вектора на число справедливы следующие соотношения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3); \tag{3.11}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}\,(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3); \tag{3.12}$$

$$\lambda\,\vec{a} = \vec{g}\,(\lambda\,a_1;\ \lambda\,a_2;\ \lambda\,a_3), \tag{3.13}$$

где $\vec{c}$=$\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d}$=$\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{g} = \lambda\,\vec{a}$.

3.1.2 Скалярное произведение векторов

Решение типовых задач

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \tag{3.14}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Приняты обозначения скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Отметим следующие свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $(\lambda\,\vec{a})\,\vec{b}=\lambda\,(\vec{a},\,\vec{b})$.

В частности: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, откуда

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2} \tag{3.15}$$

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, выражается формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{3.16}$$

Косинус угла между векторами $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{3.17}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ имеет вид:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \text{ или } \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \quad . \tag{3.18}$$

Если скалярное произведение отрицательно $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа λ, что:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \tag{3.19}$$

Если $\lambda > 0$, то векторы имеют одинаковое направление, если $\lambda < 0$, то направление противоположное. Из (3.19) следует, что у коллинеарных векторов координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Аппарат векторной алгебры позволяет создать особый метод решения различных геометрических задач.

В таблице приводится примеры использования векторного языка для формулировки и доказательства некоторых геометрических утверждений или вычисления геометрических величин.

Таблица 4. Использование векторного языка

№	Что требуется на геометрическом языке	Что достаточно сделать на векторном языке
1	Установить параллельность прямых m и n	Вводятся отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, находят $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$, где отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ принадлежат соответственно прямым m и n; λ — число.
2	Установить, что точки A, B и C принадлежат прямой m	а) Установить справедливость одного из следующих равенств: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$; б) Доказать равенство $$\overrightarrow{MC} = p\overrightarrow{MA} + q\overrightarrow{MB},$$ где $p + q = 1$ и M — произвольная точка прямой.

Таблица 4. Использование векторного языка

№	Что требуется на геометрическом языке	Что достаточно сделать на векторном языке
3	Установить перпендикулярность прямых m и n, (т.е. $m \perp n$)	Из скалярного произведения $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0,$$ где точки A и B принадлежат прямой m, а точки C и D — прямой n.
4	Вычислить длину отрезка $\lvert AB \rvert$	В некоторой системе координат превратить искомый отрезок AB в вектор $\vec{a}$ и воспользоваться формулой $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \lvert \vec{a} \rvert^2$.
5	Вычислить величину угла	Выбрать на сторонах угла векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и воспользоваться формулой $$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert \vec{a} \rvert \cdot \left\lvert \vec{b} \right\rvert},$$ где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример 3.1. Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{n}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$.

Выразить $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$

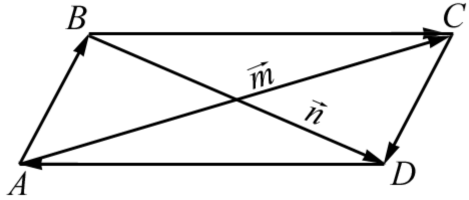

Рис. 3.13.

Решение. По определению суммы и разности векторов имеем $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\vec{m}$. Сложив эти равенства, получим

$$\overrightarrow{BC}=(\vec{m}+\vec{n})/2$$

Далее находим:

$$\overrightarrow{CD}=\vec{n}-\overrightarrow{BC}=\vec{n}-(\vec{m}+\vec{n})/2=(\vec{n}-\vec{m})/2,$$

$$\overrightarrow{AB}=-(\vec{n}-\vec{m})/2=(\vec{m}-\vec{n})/2, \overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=-(\vec{m}+\vec{n})/2.$$

Пример 3.2. Векторы $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\vec{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Решение.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(-3+5;\,0-2;\,4+4)=(1;-1;4).$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $|\overrightarrow{AM}| = 3\sqrt{2}.$

Пример 3.3. При каком значении z векторы $\vec{a}\,(6;0;12)$ и $\vec{b}\,(-8;\ 13;\ z)$ перпендикулярны?

Решение. Воспользуемся формулой (3.17):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\cdot(-8) + 0\cdot 13 + 12\cdot z = 0, \quad 12z - 48 = 0, \quad z = 4.$$

Ответ: $z = 4.$

Пример 3.4. При каком значении α векторы $\vec{a}\,(2;\ 3;\ -4)$ и $\vec{b}\,(\alpha;\ -6;\ 8)$ коллинеарны?

Решение. Воспользуемся соотношением (3.18), имеем $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, отсюда: $2 = \lambda\alpha$, $3 = -6\lambda$, $-4 = 8\lambda$.

Решая эту систему получим $\lambda = -1/2$, $\alpha = -4$.

Или из пропорциональности координат:

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -4.$$

Ответ: При $\alpha = -4.$

Пример 3.5. Даны вершины треугольника $A(-1;\ 4;\ 1)$, $B(3;\ 4;\ -2)$. $C(5;\ 2;\ -1)$.
Найти $\angle ABC$.

Решение. Находим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$; имеем $\overrightarrow{BA} = (-4;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2;\ -2;\ 1)$. Угол $\angle ABC$ равен углу между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, обозначим его через φ, тогда:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-4)\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 3\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+0+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos\varphi = -\frac{1}{3},\ \varphi = \arccos(-\frac{1}{3})$.

Пример 3.6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол равный 60° .
Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ вычислить ($2\vec{a} + \vec{b}$)($2\vec{a} - 3\vec{b}$).

Решение. Найдем скалярное произведение:

$$(2\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 4\vec{a}^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ - 3\vec{b}^2 =$$
$$= 4\cdot 6^2 - 6\cdot 6\cdot 3\cdot 0,5 + 2\cdot 6\cdot 3\cdot 0,5 - 3\cdot 3^2 = 81.$$

Ответ: ($2\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b}) = 81$.

Пример 3.7. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.
Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Решение. Воспользуемся соотношением (3.15) для нахождения модуля вектора через скалярное произведение. Находим:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2.$$

Аналогично, находим:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2.$$

Получаем:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2; |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2.$$

Складываем эти два соотношения: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.
Переходим к числам:

$$30^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 23^2, \text{ отсюда } \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \quad 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 23^2 - 30^2 = 400,$$

или $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.
Второе значение корня не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

Пример 3.8. Найти координаты точки C , лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1;2;3)$ и $B(2;2;4)$.

Решение. Так как точка C лежит на оси Ox, то ее вторая и третья координаты равны нулю, т.е. координаты точки C есть $x = a;\ y = 0;\ z = 0$. По формуле (3.7) расстояния между двумя точками имеем:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 14}.$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(a-2)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 24}.$$

Поскольку $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, то $\sqrt{a^2 - 2a + 14} = \sqrt{a^2 - 4a + 24}$.

Обе части полученного уравнения определены при всех значениях и неотрицательны. Следовательно, это уравнение равносильно уравнению $a^2 - 2a + 14 = a^2 - 4a + 29$, его единственный корень $a = 5$.

Ответ: Координаты точки $C(5;\ 0;\ 0)$.

Пример 3.9. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершины $D(3;\ 1;\ -2)$, векторы $\overrightarrow{DC}(-5;\ -1;\ 2)$ и $\overrightarrow{DB}\,(4;-6;-1)$.

Найти сумму координат вершины A.

Решение. Сделаем схематический чертеж (3.14):

Пусть искомые координаты точки A будут $(a_1; a_2; a_3)$, тогда вектор $\overrightarrow{DA}(a_1 - 3;\ a_2 - 1;\ a_3 + 2)$. Кроме того $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$, тогда $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

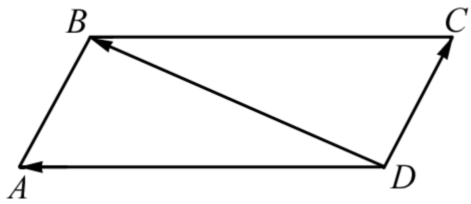

Рис. 3.14.

Переходя к координатам, будем иметь

$$a_1 - 3 = 4 + 5 \Rightarrow a_1 = 4 + 5 + 3 = 12.$$

$$a_2 - 1 = -6 + 1 \Rightarrow a_2 = -6 + 1 + 1 = -4.$$

$$a_3 + 2 = -1 - 2 \Rightarrow a_3 = -1 - 2 - 2 = -5.$$

Суммируя, полученные координаты, получаем: $a_1 + a_2 + a_3 = 12 - 4 - 5 = 3.$

Ответ: $a_1 + a_2 + a_3 = 3.$

Пример 3.10. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = x^2$ заданы две точки A и такие, что скалярные произведения $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = 1$ и $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = -2$, где $\bar{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найти вектор $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ и его длину.

Решение. Запишем координаты единичного вектора оси Ox вектора $\vec{i}(1;\, 0)$. Обозначим координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ как $(x_1;\ y_1)$ координаты вектора $\overrightarrow{OB}$ как $(x_2;\ y_2)$, тогда наши скалярные произведения, согласно условию задачи:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 = 1; \quad \overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = 1 \cdot x_2 + 0 \cdot y_2 = -2.$$

Отсюда получаем: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Нам известно, что точки A и B лежат на кривой $y = x^2$, тогда найдем вторые координаты $y_1 = 1$ и $y_2 = 4$ векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (координаты этих векторов такие же, как и у точек A и B поскольку точка $O(0,\ 0)$.

Итак, координаты векторов $\overrightarrow{OA}(1;\ 1)$ и $\overrightarrow{OB}(-2;\ 4)$. Находим вектор

$$2\,\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = (2 + 6;\ 2 - 12) = (8;\ -10).$$

Далее находим модуль этого вектора

$$|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}.$$

Ответ: $|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{41}$

3.2 Применение методов векторной алгебры для решения геометрических задач

Пример 3.11. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC| = 8$) точка E делит боковую сторону $|AB|$ в отношении 3:1 (считая от вершины B). Найти угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 12$.

Решение. Обозначим угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$ через φ.

Так как: $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|}$, то для получения ответа надо найти $\left|\overrightarrow{CE}\right|$ и скалярное произведение $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}$.

Из рисунка (3.15)видно, что $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$ и что $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

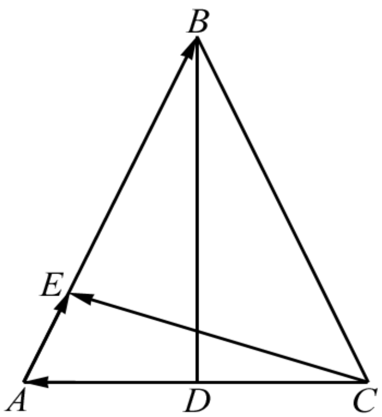

Рис. 3.15.

Поэтому, пользуясь свойствами скалярного произведения, имеем

$$(\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}, CA) =$$
$$= (\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}).$$

Опуская высоту BD в треугольнике ABC, получаем прямоугольный треугольник ABD, в котором $\angle BAD = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \left|\overrightarrow{AD}\right| : \left|\overrightarrow{AB}\right| = 6/8 = 3/4.$$

Поскольку величина угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ равна $\pi - \angle BAD$, то $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -3/4$. Значит

$$(\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}) = 144 + \frac{1}{4}\cdot 12\cdot 8\cdot(-3/44) = 126.$$

Далее по теореме косинусов имеем:

$$\left|\vec{EC}\right|^2 = \left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{AE}\right|^2 - 2\left|\vec{AC}\right|\left|\vec{AE}\right|\cos CAE = 144 + 4 - 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3/4 = 112.$$

Теперь получаем, что

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right|} = \frac{126}{\sqrt{112} \cdot 12} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Значит, $\varphi = \arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Пример 3.12. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1)$ равна 1.

На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $1/3$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $1/4$.

Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α (рис. 3.16).

Решение. Обозначим через Q ортогональную проекцию точки B_1 на плоскость α . Введем в пространстве систему координат, поместив начало координат в точку B и направив ось Ox по лучу $\overrightarrow{BA}$, ось Oy по лучу $\overrightarrow{BC}$, ось Cz по лучу $\overrightarrow{BB_1}$ и взяв за единицу масштаба отрезок, длина которого равна 1. Тогда точки E , F , K , B_1 будут иметь следующие координаты $E(1;01/3)$, $F(0;1/4;0)$; $K(1/2;1/2;1/2)$, $B_1(0;0;1)$.

Поскольку векторы $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KF}$ не коллинеарны и точка Q лежит в плоскости α , то существуют числа β и γ такие, что $\overrightarrow{KQ} = \beta \cdot \overrightarrow{KE} + \gamma \cdot \overrightarrow{KF}$ и $\overline{QB}_1 = \overline{KB}_1 - \overline{KQ} =$ $= \overrightarrow{KB_1} - \beta \cdot \overrightarrow{KE} + \gamma \cdot \overrightarrow{KF}.$

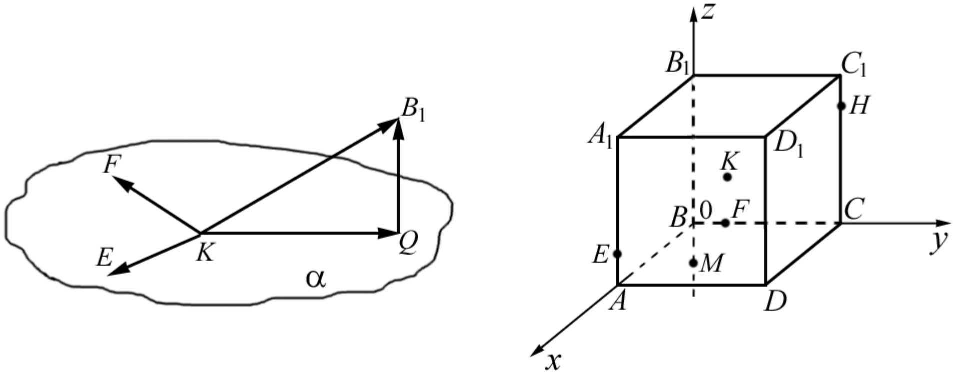

Рис. 3.16.

Поскольку $\overrightarrow{KE} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{KF} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{KB_1} = \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, то

$$\overrightarrow{QB_1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma;\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\gamma;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right).$$

Вектор $\overrightarrow{QB_1}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KF}$, поэтому

$$0 = (\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{QB_1}) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma\right) - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{4}\right) -$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right) = -\frac{1}{12} - \frac{19}{36}\beta + \frac{1}{24}\gamma.$$

$$0 = (\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{QB_1}) = -\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma\right) - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{4}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\beta - \frac{9}{16}\gamma.$$

Решая эту систему относительно β и γ :

$$-\frac{1}{12} - \frac{19}{36}\beta + \frac{1}{24}\gamma = 0; \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\beta - \frac{9}{16}\gamma = 0,$$

находим β = -12/85 и γ = 18/85. Тогда $\overrightarrow{QB_1} = \left(-\frac{55}{170}; -\frac{88}{170}; \frac{99}{170}\right)$, и искомое расстояние равно:

$$\left|\overrightarrow{QB_1}\right| = \sqrt{\left(-\frac{55}{170}\right)^2 + \left(-\frac{88}{170}\right)^2 + \left(\frac{99}{170}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{170}}.$$

Ответ: $\left|\overrightarrow{QB_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{170}}$

Пример 3.13. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник, а точка O — основание высоты SO пирамиды – является серединой стороны AB и $SO : AB = 3 : 2$.

На ребрах SC и SB взяты соответствующие точки P и Q – середины этих ребер. Найти угол между прямыми AP и CQ (рис.3.17):

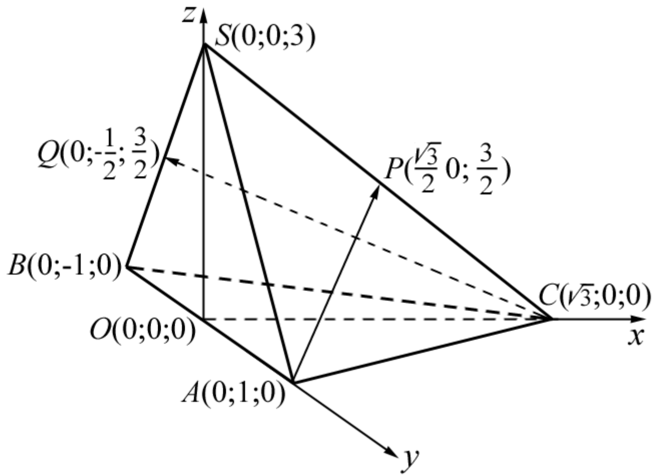

Рис. 3.17.

Решение. Соединим точку O с точкой C . Так как SO – высота пирамиды, то $SO \perp AB$ и $SO \perp OC.$ Кроме того, треугольник ABC правильный, поэтому $CO \perp AB.$

Таким образом, удобно выбрать прямоугольную систему координат $Oxyz$, как показано на рисунке. Примем сторону основания равной $AB = 2.$ Тогда $SO = 3,\ OC = \sqrt{3}.$ Найдем координаты нужных для дальнейших вычислений точек. Имеем

$$O(0; 0; 0),\ C(\sqrt{3}; 0; 0),\ A(0; 1; 0),$$

$$S(0; 0; 3), B(0; -1; 0), P(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{3}{2}), Q(0; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}).$$

Далее находим координаты векторов

$$\overrightarrow{AP}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-1;\frac{3}{2}\right),\quad \overrightarrow{CQ}\left(-\sqrt{3};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Теперь прямым счетом находим:

$$\cos(AP,CO)=\left|\cos(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{CQ})\right|=\frac{\left|-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}+1+\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}}=\frac{5\sqrt{22}}{88}.$$

Ответ: Угол между прямыми AP и CQ равен $arccos\frac{5\sqrt{22}}{88}$.

Векторно-координационный способ нахождения угла прямой с плоскостью.

Если прямая AB пересекает плоскость τ и не перпендикулярна τ, то углом между прямой AB и плоскостью τ называется угол между прямой AB и ее проекцией на плоскость τ.

Решение такого рода задач по нахождению угла прямой с плоскостью состоит в следующем: используя особенности заданной фигуры, вводят в пространстве прямоугольную систему координат, находят координаты нужных точек, координаты какого-нибудь вектора $\vec{a}$, коллинеарного прямой AB, и вектора $\vec{n}$ – нормального вектора плоскости τ.

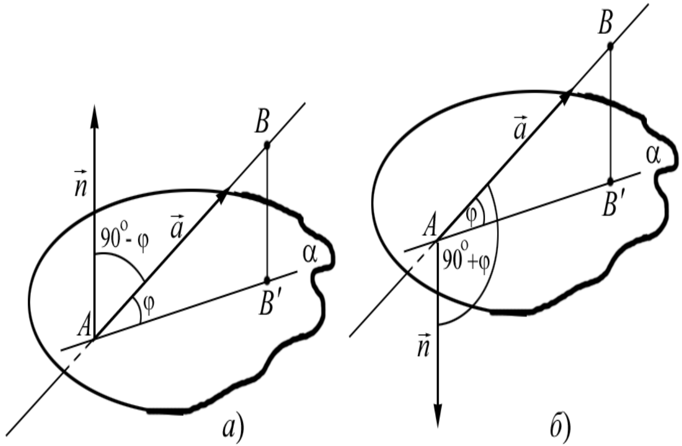

Рис. 3.18.

Далее находят косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

Так как ψ – это угол между двумя прямыми, то

$$0^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ.$$

Но угол между векторами может принимать значения от 0 $^\circ$ до 180 $^\circ$.

1. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ изменяется от $0^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ$ (рис.3.18, а), то $\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}) \geqslant 0$ и $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}) = 90^\circ - \psi$. Но $\cos(90^\circ - \psi) = \sin\psi$, то есть в этом случае:

$$\sin\psi = \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}) \tag{3.20}$$

2. Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\vec{n}$ изменяется от $90^\circ \leqq \psi \leqslant 180^\circ$ (рис. 3.18, б), то $\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}) < 0$ и $(\bar{a}\,\hat{}\,\vec{n})$ = 90 $^\circ$ + ψ . Но $\cos(90^\circ + \psi) = -\sin\psi$, то есть в этом случае:

$$\sin\psi = -\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}) \tag{3.21}$$

Объединяя результаты (3.20) и (3.21) получаем формулу

$$\sin\psi = |\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n})|,$$

которую мы будем применять при решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью векторно-координационным способом.

Координаты вектора $\vec{n}$ можно найти, не выходя за рамки школьной программы, например следующим образом: если вектор $\vec{n}\,(n_1; n_2; n_3)$ – нормальный вектор плоскости τ, а векторы

$\vec{b}(b_1;\ b_2\ ; b_3)$

и $\vec{c}(c_1;\ c_2;\ c_3)$ – векторы, параллельные плоскости τ, то $\vec{n} \perp \vec{b}$ и $\vec{n} \perp \vec{c}$, т.е $(\vec{n}\,, \vec{b}) = 0$ и $(\vec{n}\,, \vec{c}) = 0$ или

$$\begin{cases} b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3 = 0, \\ c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений координаты n_1, n_2, n_3 находятся с точностью до пропорциональности. Их можно принять за координаты нормального вектора плоскости τ.

Пример 3.14. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм с углом при вершине A, равным $60°$.

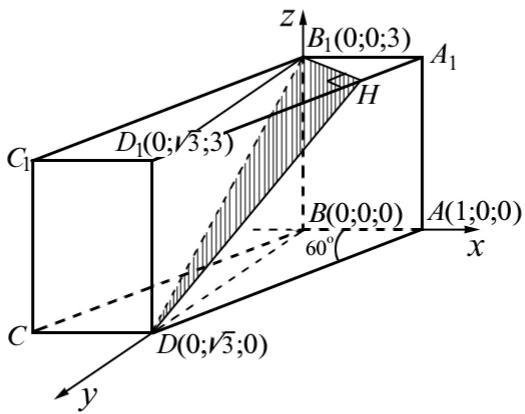

Рис. 3.19.

Отношение ребер параллелепипеда $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$. Найдем угол между прямой B_1D и плоскостью грани AA_1D_1D.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Bxyz$ (рис. 3.19):

Воспользуемся для этого тем, что заданный параллелепипед прямой, т.е. $BB_1 \perp BA$ и $BB_1 \perp BD$. Прямые BA и BB_1, таким образом, можно принять соответственно за оси Bx и Bz. Для задания оси By отметим, что в треугольнике ABD

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60°.$$

Положив $AB = a$, получаем, что тогда $AD = 2a$ и $BD^2 = a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 60° = 3a^2$. Тогда в треугольнике ABD :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ т.е.} \angle ABD = 90°.$$

Итак, прямую BD можно принять за ось By. Так как в заданном параллелепипеде $AB : AA_1 = 1 : 3$, и, как подсчитано выше, $BD^2 = 3a^2$, т.е. $BD = a\sqrt{3}$, то, принимая отрезок BA за единичный отрезок, координаты точек A , D и B_1 получим следующими: $A(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, и $B_1(0;\ 0;\ 3)$.

Определим в выбранной системе координат координаты точки D_1 и вектора $\overrightarrow{B_1D}$. Получим, $D_1(0;\sqrt{3};\ 3)$, $\overrightarrow{B_1D}\,(0;\sqrt{3};\ -3)$. Найдем далее координаты $(n_1;n_2;n_3)$ какого-нибудь вектора $\vec{n}$ – нормального вектора плоскости AA_1D_1. Сделаем это, исходя из следующих соображений: так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости AA_1D_1, то $\vec{n}\perp\overrightarrow{DD_1}$ и $\vec{n}\perp\overrightarrow{AD}$. Но $\overrightarrow{DD_1}(0;\ 0;\ 3)$ и $\overrightarrow{AD}(-1;\ \sqrt{3};\ 0)$. Таким образом,

$$\begin{cases} 3n_3 = 0, \\ -n_1 + \sqrt{3}n_2 = 0 \end{cases},$$

откуда $n_3 = 0$ и, полагая, например, $n_3 = \sqrt{3}$, находим $n_1 = 3$. Итак, в качестве нормального вектора плоскости AA_1D_1 можно взять вектор $\vec{n}(3;\ \sqrt{3};\ 0)$, тогда, обозначив искомый угол через ψ , получаем:

$$\sin\psi = |\cos(\vec{n}\,{}^\wedge\overrightarrow{B_1D})| = \frac{|3|}{\sqrt{3+9}\sqrt{3+9}} = \frac{1}{4}.$$

Это значит, что угол между прямой B_1D и плоскостью грани AA_1D_1D равен $\arcsin\frac{1}{4}$.

Ответ: угол между прямой B_1D и плоскостью грани AA_1D_1D равен $\arcsin\frac{1}{4}$.

Векторно-координационный способ нахождения двугранного угла между плоскостями сводится к нахождению угла между их нормальными векторами.

Пример 3.15. На ребрах AC и SA правильного тетраэдра $SABC$ взяты соответственно точки K и L — середины этих ребер. Через точки B, K и L проведена секущая плоскость. Найдем угол между плоскостями BKL и SAC.

Решение. Ведем систему координат $Dxyz$, как показано на рисунке 3.9 (точка D – середина ребра AB):

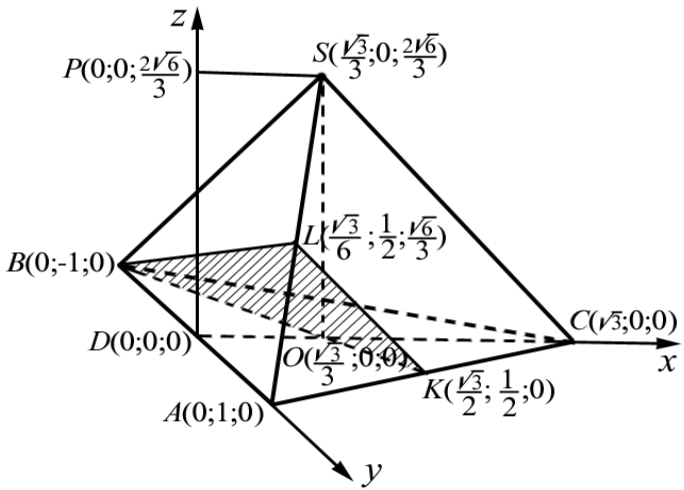

Рис. 3.20.

Приняв, например, $AB = 2$, найдем координаты нужных точек. Получаем сначала точки $D(0;\ 0;\ 0)$, $C(\sqrt{3}; 0; 0)$ и $A(0; 1; 0)$, затем точки $O\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$, $P\left(0; 0; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, далее $B(0; -1; 0)$, $L\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ и $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Теперь найдем координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальных векторов соответственно плоскостей BKL и SAC. Находим, что $\overline{BK}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, $\overline{BL}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Так как $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{BK}$ и $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{BL}$, то полагая $\vec{n}_1(x_1, y_1, z_1)$, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{2}{3}y_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}x_1 + \frac{3}{2}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}z_1 = 0. \end{cases}$$

Из системы выражаем наши неизвестные координаты, например, через y_1 , имеем $\vec{n}_1(-\sqrt{3}y_1;\ y_1;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}?_1)$.

Тогда с точностью до пропорциональности находим $\vec{n}_1(-\sqrt{3}; 1; -\frac{\sqrt{6}}{2})$.

Аналогично находим и вектор $\vec{n}_2(x_2, y_2, z_2)$. Так как $\overrightarrow{SA}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\,; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}(\sqrt{3}; -1; 0)$ и $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{SA}$, $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AC}$, то

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - y_2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}z_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_2 - y_1 = 0. \end{cases} \quad , \quad \vec{n}_2(1; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Обозначим для краткости угол между плоскостями BKL и SAC через φ , находим:

$$\cos\varphi \quad = |\cos(\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2)| = \frac{\left| -\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{4} \right|}{\sqrt{3+1+\frac{6}{4}} \cdot \sqrt{1+3+\frac{2}{4}}} = \frac{\sqrt{33}}{33}.$$

Таким образом, искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{33}}{33}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{33}}{33}$.

3.3 Вопросы для самоподготовки

1. Какие векторы называются равными?
2. Правило сложения любого числа векторов.
3. Какие векторы называются противоположными?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов?
6. Понятие прямоугольного базиса. Разложение вектора по базису
7. Понятие координат вектора.

8. Как найти координаты вектора, заданного координатами точек — начала и конца этого вектора?
9. Чему равна длина (модуль) вектора, заданного своими координатами?
10. К чему сводятся линейные операции над векторами, заданными своими координатами?
11. Условие коллинеарности двух векторов, заданными своими координатами.
12. Определение скалярного произведения двух векторов. Его свойства.
13. Когда скалярное произведение двух векторов больше нуля, меньше нуля?
14. Условие перпендикулярности двух векторов?
15. Выражение скалярного произведения через координаты векторов?
16. Нахождение угла между двумя векторами.

3.4 Тесты по теме «Элементы векторной алгебры»

Тест по теме «Элементы векторной алгебры»

№	Задание	Варианты ответов
1	Даны векторы $\vec{a}(-1;\,2;\,0)$, $\vec{b}(3;\,1;\,1)$, $\vec{c}(2;\,0;\,1)$. Вычислить координату x вектора $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\frac{\vec{c}}{3}$.	1. $-17/3$; 2. $-19/3$; 3. $-15/3$; 4. $-18/3$; 5. правильный ответ не указан
2	На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;\,7)$ и $B(5;\,6;-5)$.	1. $M(0;\,1;\,0)$; 2. $M(0;\,5;0)$; 3. $M(0;\,4;0)$; 4. $M(0;\,2;0)$; 5. правильный ответ не указан

Тест по теме «Элементы векторной алгебры»

3	Даны векторы $$\vec{a}(2;\ 3;\ 0),\ \vec{b}(0;-3;-2),\ \vec{c}(1;\ 1;-1).$$ Вычислить координаты вектора $$\vec{a}-(1/2)\vec{b}+\vec{c}.$$	1. $(3;10/2;\ 0)$; 2. $(4;18/2;\ 0)$; 3. $(3,5;15/2;0)$; 4. $(3;11/2;0)$; 5.правильный ответ не указан
4	Даны точки $A\,(3;-4;-1)$ и $B\,(-1;\ 2;-3)$. Найти длину $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.	1. $\sqrt{56}$; 2. $\sqrt{26}$; 3. 8; 4. 13; 5. правильный ответ не указан
5	Даны три вершины $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;\ 2;-3)$ параллелограмма. Вычислить координаты четвертой вершины D .	1. $D(10;-5;4)$; 2. $D(9;-5;6)$; 3. $D(9;-5;\ 3)$; 4. $D(10;-5;6)$; 5. правильный ответ не указан

Тест по теме «Элементы векторной алгебры»

6	Параллелограмм построен на векторах $$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}\text{и}\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k},$$ длина его диагоналей равна:	1. $\sqrt{6};\ 3\sqrt{2}$; 2. $6;\ 3$; 3. $3;\ 3\sqrt{2}$; 4. $\sqrt{6};\ 5$; 5. правильный ответ не указан
7	Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$ и $C(-4;2;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A	1. $\sqrt{13}$; 2. 6; 3. 3; 4. 7; 5. правильный ответ не указан
8	Дан вектор $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$, его единичный вектор $\vec{}_0$ того же направления равен	1. $\vec{a}_0$ = $(1;\ 2;\ 5)$; 2. $\vec{a}_0$ = $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$; 3. $\vec{a}_0$ = $(1;\ 2;\ 1)$; 4. $\vec{a}_0$ = $(\frac{3}{2};\frac{-1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$; 5. правильный ответ не указан

Тест по теме «Элементы векторной алгебры»

9	Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}$ = $6\vec{i}+2\vec{j}$. Их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно	1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0;$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=5;$ 3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=4;$ 4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ 5. правильный ответ не указан
10	Даны векторы $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;\ 2)$. Вычислить скалярное произведение $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$	1. -100 ; 2. -150 ; 3. -250 ; 4. -200 ; 5. правильный ответ не указан

3.5 Задачи для самостоятельной работы

1. Заданы координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(4;5;-3)$. Написать разложение вектора по единичным ортам.

2. Даны точки $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(3;-4\,;\ 6)$. Найти проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат; определить длину вектора.

3. Задан вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{6}+\vec{j}-\sqrt{12}\,\vec{k}$. Найти единичный вектор того же направления.

4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(2;\ 4;\ 1)$ и $\vec{b}\,(3;\ \ 5;\ \ 7)$.

5. При каком значении x векторы $\vec{a}\,(x;4)$ и $\vec{b}(5;\ 6;\ 3)$ перпендикулярны?

6. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

7. Найти угол между векторами $2\,\vec{a}$ и $\vec{b}/2$, если $\vec{a}\,(-4;\ 2;\ 4)$ и $\vec{b}\,(2;\ -2;\ 0)$.

8. Найти угол в градусах между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Определить углы треугольника с вершинами $A(2;-1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $C(0;\ 0;\ 5)$.

10. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

11. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ - единичные векторы с углом между ними 60 $^{\circ}$.

12. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -5\vec{m} + \vec{n}$; $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ - единичные векторы с углом между ними 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 5$ и, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол равный $\frac{2\pi}{3}$, вычислить при каком значении α векторы $\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны?

13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол равный $\frac{2\pi}{3}$ и $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 5$. Найти $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

14. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$. Найти $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

15. Прямая, проходящая через точку O – центроид куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллельно прямой AD, пересекает сферу, описанную около этого куба, в точках P и Q, причем точка P и вершина A лежат по разные стороны от плоскости BDD_1. Найдем следующие углы:

    а) между прямыми AP и B_1D;

    б) между прямой AP и плоскостью BDD_1;

    в) между плоскостями APB и BDD_1.

3.6 Варианты проверочной работы по теме: «Элементы векторной алгебры »

Вариант 1.

1. Пусть – точка пересечения медиан треугольника и $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Разложить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. При каких значениях z длина вектора
$\vec{a} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + z\vec{k}$ равна 11. В ответе записать произведение всех найденных z.

Вариант 2.

1.Пусть и – середины сторон и параллелограмма и $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$. Выразить вектор $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\,(\sqrt{2};\ 1;\ -1)$ и $\vec{b}\,(1;\ 0;\ 0)$.

Вариант 3.

1. Точка – середина стороны треугольника . Выразите $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\,(2;\ -4;\ 4)$ и $\vec{b}\,(-3;\ 2;\ 6)$.

Вариант 4.

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, O – его центр, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найдите $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $\vec{a}\,(4;\ -2;\ -4)$ и $\vec{b}\,(6;\ -3;\ 2)$. Вычислить: $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

Вариант 5.

1. В треугольнике векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ и медиана $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$. Разложить (выразить) вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{c}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ по векторам $\vec{c}$ и $\vec{p}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $\vec{a}\,(4;\ -2;\ -4)$ и $\vec{b}(6;\ -3;\ 2)$. Вычислить: $1)\,\vec{a}\vec{b};\ 2)\,(\vec{a}-\vec{b})^2$

Вариант 6.

1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$; $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$;
O – точка пересечения медиан треугольника . Разложить $\overrightarrow{A_1O}$ по векторам $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 22$ и $|\vec{a}| = 13$. Найти $\left|\vec{b}\right| - |\vec{a}|$.

3.7 Ответы по теме «Элементы векторной алгебры»

3.7.1 Тесты

№	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.
ответ	2	1	4	1	2	1	4	2	5	4

3.7.2 Задачи для самостоятельной работы

1. $A\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.
2. $x_{AB} = 2; y_{AB} = -6; z_{AB} = -3$, $\left|A\vec{B}\right| = 7$.
3. $\vec{a}_0 = \left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}; -\frac{\sqrt{12}}{7}\right)$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 33$.
5. $x = -6$.
6. $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{14}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{22}$.
7. 135^0 .
8. 90^0 .
9. $\angle B = \angle B = 45^\circ$.
10. 90^0 .
11. $d_1 = \sqrt{7}$; $d_2 = \sqrt{13}$.
12. $d_1 = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$; $d_2 = \sqrt{65 + 8\sqrt{3}}$.

13. 40.
14. 7.
15. 22. (см рис. 3.21)

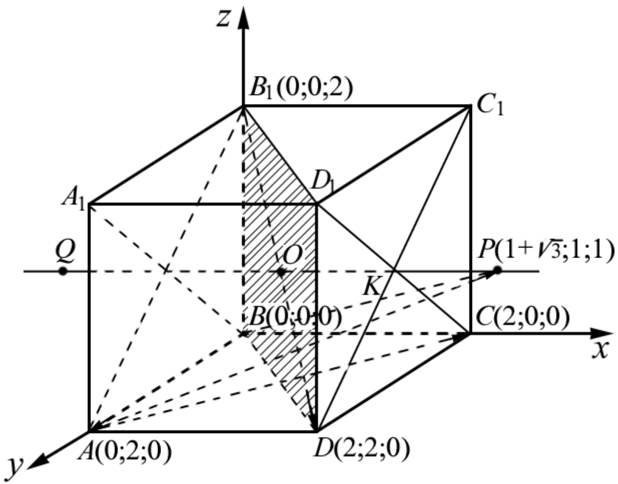

Рис. 3.21.

16. а) $\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}$; б) $\arcsin \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{4}-\sqrt{3}}$;

3.7.3 Варианты проверочной работы

1. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$.
2. -36.
3. $\overrightarrow{BD} = 2(\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$.
4. $1/\sqrt{2}$.
5. $\overrightarrow{CM} = -0.5 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
6. $5/21$.
7. $O\vec{C} = \vec{b} - \vec{a},\ O\vec{D} = -\vec{?},\ O\vec{E} = -\vec{b}$, $O\vec{F} = \vec{a} - \vec{b}$.
8. -200.
9. $\vec{p}$ = $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{?})$, $\vec{b}$ = $2\vec{p} - \vec{c}$.
10. 1) 22; 2)41.
11. $\overrightarrow{A_1Q} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.
12. 6

4 Элементы комбинаторики и бином Ньютона

4.1 Комбинаторика

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами и нахождении числа способов, которыми это может быть сделано. С комбинаторными вычислениями приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику при рассмотрении различных возможных типов связи атомов в молекулах, биологу при изучении различных возможных последовательностей чередования аминокислот в белковых соединениях, конструктору, инженеру, диспетчеру при составлении графика движения и др.

Комбинаторные вычисления лежат в основе решения многих задач теории вероятностей – важнейшего раздела современной математики, посвященного случайным величинам.

Сформулируем *основное правило комбинаторики* (правило умножения).

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье действие n_3 способами и так до $k-$го действия, которое можно выполнить n_k способами, то всю последовательность из k действий вместе можно выполнить N *способами, где*

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k. \tag{4.1}$$

Пример 4.1. Сколькими способами N можно собрать слово «мама», имея в азбуке пять букв «а» и три буквы «м»?

Решение. Первую букву слова можно выбрать тремя способами и на каждый вариант первой буквы имеется пять способов выбрать вторую букву. Значит, способов собрать слог «ма»: $3 \cdot 5 = 15$. Для каждого из них третья буква может быть получена двумя способами остается только две буквы «м», а последняя буква – четырьмя способами: $N = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 120$.

Ответ: N =120.

Остановимся на некоторых понятиях.

Под *множеством* понимают совокупность элементов произвольной природы, рассматриваемую как единое целое. Обычно в комбинаторике используют понятие «генеральная совокупность объема n.» Это понятие можно связывать с понятием множества, содержащего n элементов. Например, множество учеников в классе, множество цифр в конкретной системе исчисления. Из множества можно образовывать части (*подмножества*).

Подмножество, состоящее из k элементов $n-$множества называют $k-$подмножеством $n-$множества или *соединением*[2] из n элементов по k. Это k подмножество из n множества называют еще и *выборкой* объема k из генеральной совокупности объема n.

[2]«*Соединение*» – синоним слова «*комбинация*» (от латинского combino — соединяю)

В зависимости от правил выбора соединения делят на три типа: *перестановки, размещения и сочетания.*

Формула для числа перестановок

Перестановками называют соединения, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число таких различных соединений элементов (*перестановок*) определяется формулой

$$P_n = n!, \tag{4.2}$$

которая непосредственно следует из основного правила комбинаторики.

Замечание: Символ $n!$ читается как факториал — есть сокращенное обозначение произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$. Принимается, что $1! = 1,\ 0! = 1$.

Пример 4.2. Сколько существует способов расстановки на полке 6 разных книг?

Решение. На первое место можно поставить любую из 6 книг, для каждого варианта первой книги на второе место может быть поставлена любая из оставшихся 5 книг. Для любой пары первых книг (а всего таких пар $6 \cdot 5 = 30$) на третьем месте может быть одна из 4 книг. Значит, разных троек всего $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ и так далее. Итак, число перестановок N из 6 книг равно: $N = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Ответ: $N = 720$.

Пример 4.3. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

Решение. Ясно, что в этом случае на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски может быть расположено только по одной ладье. Число возможных позиций N – число перестановок из 8 элементов: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Ответ: $N = 40320$.

Формула для числа размещений из n элементов по k

Размещениями называют соединения , составленные из n различных элементов по k элементов, которые *отличаются либо составом элементов, либо их порядком.*

Если из n разных объектов выбирается по k разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \qquad (4.3)$$

– число размещений без повторений.

Из основного правила комбинаторики эта формула получается на основе следующих рассуждений. На первом месте может быть любой из n объектов, на втором – любой из оставшихся $(n-1)$ объектов (так как объекты не должны повторяться) и так далее, а на последнем, k -ом месте, – любой из неиспользованных $(n-k+1)$ объектов.

Заметим, что

$$A_n^n = P_n. \tag{4.4}$$

Пример 4.4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5$? И сколько из них с неповторяющимися цифрами?

Решение. Если цифры могут повторяться, то на любом месте в числе могут быть любые из пяти цифр. Значит, всего трехзначных чисел получается $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$. Если же цифры не повторяются, то таких чисел $A_5^3 = \frac{n}{(n-k)} = \frac{5}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ответ: Всего трехзначных чисел 125. Число неповторяющихся чисел — 60.

Пример 4.5. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить роли в спектакле, в котором 6 мужских и 3 женские роли?

Решение. Рассуждаем следующим образом: распределяем мужчин на мужские роли (первое действие). Тогда $n_1 = A_{10}^6$ (важно не только выбрать актеров, но и распределить между ними роли). После этого производим второе действие – распределяем женские роли. Это можно осуществить $n_2 = A_8^3$ способами. Поэтому по принципу произведения: $N = n_1 \cdot n_2 = A_{10}^6 \cdot A_8^3$.

Ответ: $N = A_{10}^6 \cdot A_8^3$.

Формула для числа сочетаний из n элементов по k

Сочетаниями называют соединения, составленные из n различных элементов по k элементов, которые *отличаются хотя бы одним элементом.*

По определению, в выборках из n объектов по k объектов порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то размещения, отличающиеся лишь порядком следования, становятся одинаковыми. Число таких одинаковых выборок по k разных объектов, которые получаются друг из друга перестановкой, равно $k!$ Поэтому, число выборок из n по k без учета порядка следования определяется формулой *числа сочетаний без повторений:*

$$C_n^k = A_n^k/k! = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \tag{4.5}$$

Из этой формулы получаем:

$$C_n^0 = 1. \tag{4.6}$$

Пример 4.6. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

Решение. Чтобы рассмотреть все возможные комиссии, отличающиеся только составом, нужно рассмотреть все возможные трехэлементные подмножества множества, состоящего из 7 человек. Искомое число способов равно: $C_7^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$.

Ответ: $C_7^3 = 35$.

Пример 4.7. Найти число N всевозможных заполнений карточки спортлото «6 из 49 »

Решение. Генеральная совокупность – числа карточки спортлото ($n = 49$. Выборка – это зачеркнутые 6 чисел. Порядок, в котором вычеркиваются номера, не существенен. Повторов быть не может (в карточке любой номер есть только один раз). Поэтому

$$N = C_{49}^{6} = 13983816.$$

Ответ: $N = 13983816.$

Пример 4.8. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв по три партии каждый, и поэтому на турнире было сыграно всего 4 партии. Сколько было участников первоначально?

Решение. Пусть искомое число участников турнира было . Полностью сыграли друг с другом по партии лишь $x - 2$ участников (двое выбыли) и число этих партий N находится как число сочетаний из $x - 2$ элементов по 2:

$$N = C_{x-2}^{2} = \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{1\cdot 2}.$$

Чтобы найти общее количество сыгранных партий (а их 4 необходимо к числу N добавить 6 сыгранных партий двумя выбывшими участниками. Получаем уравнение:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84.$$

Решаем его: $x^2 - 5x - 150 = 0$, $x = 15$ (отрицательный корень опускаем).

Ответ: первоначально было 15 участников.

Пример 4.9. Найти число диагоналей выпуклого десятиугольника.

Решение. Вершины десятиугольника образуют множество 10 точек плоскости, из которых любые три не лежат на одной прямой. Соединяя всякую пару этих точек отрезком прямой, получаем $C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$ отрезков, 10 из которых являются сторонами многоугольника, а другие 35 – его диагоналями.

Ответ: $C_{10}^2 = 45$.

Сочетания используются, если важен только состав элементов в выборке. Рассмотрим свойства сочетаний.

Свойство 1. Имеет место соотношение:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \tag{4.7}$$

Свойство 2. Справедлива формула:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k. \tag{4.8}$$

Дадим определение размещений через сочетания. Пусть из множества, содержащего n элементов, составлены все сочетания по k элементов. Если в каждом сочетании произвести все перестановки, то все множество образовавшихся комбинаций называется размещениями из n элементов по k.

$$A_n^k = \quad C_n^k \cdot n! = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}. \tag{4.9}$$

Пример 4.10. Решить уравнение: $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$.

Решение. По формуле (4.9):

$$A_x^2 = \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-3)(x-2)(x-1)x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-3)(x-2)} = (x-1)x = x^2 - x,$$

а по формуле (4.5):

$$C_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!\,(x-x+1)} = \frac{x!}{(x-1)!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)} = x.$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид : $(x^2 - x)x = 48 \;\Leftrightarrow\; x^3 - x^2 = 48$. Преобразуем последнее выражение

$$x^3 - 64 + 64 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 64) - (x^2 - 16) = 0.$$

Раскладываем на множители выражение в каждой скобочке и выносим общий множитель:

$$(x-4)(x^2+4x+16)-(x-4)(x+4)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)(x^2+3x+12)=0.$$

Решая последнее уравнение, имеем:

$$x_1=4;\ x^2+3x+12\neq 0.\ (D<0).$$

Ответ: $x=4.$

4.2 Бином Ньютона

Биномом Ньютона называют формулу, представляющую выражение $(a+b)^n$ *при целом положительном* n *в виде многочлена.*

При изучении формул сокращенного умножения были рассмотрены правила возведения двучлена в степень с натуральным показателем и приведены формулы для $(a+b)^n$ при $n=1,\ 2,\ 3$. Общая формула $(a+b)^n$ имеет вид:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n=T_1+T_2+\ldots+T_{n+1}. \tag{4.10}$$

Коэффициенты C_n^k, равные числу сочетаний из n элементов по k, называются *биномиальными коэффициентами.*

Для вычислений удобнее всего формула:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + ... + b^n. \quad (4.11)$$

Пример 4.11. Вычислить $(1+x)^5$.

Решение. $(x+x)^5 = x^5 + x_5^4 x^4 x + x_5^3 x^3 x^2 + x_5^2 x^2 x^3 + x_5^1 x x^4 + x^5$.

Ответ: $(1+x)^6 = x^5 + 5x^4x + 10x^3x^2 + 10x^2x^3 + 5xx^4 + x^5$

Свойства биномиальных коэффициентов

Свойство 1. Коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца бинома, равны между собой (так как $C_n^k = C_n^{n-k}$).

Свойство 2. Число биномиальных коэффициентов (следовательно, и число слагаемых в разложении степени бинома) равно $n+1$.

Свойство 3. Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

Свойство 4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на четных местах.

Свойство 5. Используя общую формулу общего члена разложения, запишем выражение для T_{k+1} и T_{k+2} :

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k; \quad T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k a^{n-k+1} b^{k+1}.$$

Таким образом, для нахождения *биномиального коэффициента следующего члена разложения* надо коэффициент данного члена умножить на показатель переменной a в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.

Натуральная степень разности двух величин вычисляется по формуле:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + ... + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + ... + (-1)^n C_n^n b^n \tag{4.12}$$

Пример 4.12. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

Решение. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n – показатель бинома. По условию задачи $2^n = 4096$. Представим 4096 как 2^{12}. Тогда $2^n = 2^{12}$, отсюда $n = 12$ и $(a+b)^n = (a+b)^{12}$. Далее рассуждаем таким образом: так как показатель бинома 12 – четное число, то наибольшим биномиальным коэффициентом является коэффициент при среднем члене разложения, то есть:

$$C_n^k = {}^{6}_{12} = \frac{12!}{6!(12-6)!} = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924.$$

Ответ: $C_{12}^6 = 924.$

Пример 4.13. Определить A_n^2, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

Решение. Пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ имеет вид :

$$C_n^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-4} = C_n^4 x^{-4} \cdot x^{(n-4)/3} = C_n^4 x^{\frac{(n-16)}{3}}.$$

Так как это слагаемое не зависит от x, то :

$$x^{\frac{(n-16)}{3}} = x^0 \Leftrightarrow n = 16.$$

Тогда $A_n^2 = A_{16}^2 = 16 \cdot (16 - (2-1)) = 16 \cdot 15 = 240.$

Ответ: $A_{16}^2 = 240.$

Пример 4.14. Многочлен $1 + x^2 - 3x^3 + x^4$ представить в виде разложения по убывающим степеням $x + 1$.

Решение. Заменяя x на $(x+1) - 1$, получаем:

$$1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = [(x+1)-1]^4 - 3[(x+1)-1]^3 + [(x+1)-1]^2 + 1.$$

Раскрываем по формуле бинома Ньютона выражение $[(x+1)-1]^k$, где $k=2,3,4$, рассматривая $x+1$ как один член. Далее приводим подобные и получаем: $(x+1)^4-7(x+1)^3+16(x+1)^2-15(x+1)+6$.

Ответ: $1+x^2-3x^3+x^4=(x+1)^4-7(x+1)^3+16(x+1)^2-15(x+1)+6.$

Пример 4.15. Найти коэффициент при x^3 в выражении:

$$(x+1)^3+(x+1)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{15}.$$

Решение. Данное выражение является геометрической прогрессией с первым членом $(x+1)^3$, и знаменателем, равным $x+1$. Поэтому имеем:

$$(x+1)^3+(x+1)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{15}=\frac{(1+x)^3[(1+x)^{13}-1]}{1+x-1}=\frac{1}{x}\big[(1+x)^{16}-(1+x)^3\big].$$

Поскольку нас интересует член с x^3, а в последнем выражении происходит деление на x, значит будем искать в числителе член, содержащий x^4. Такой член есть только в разложении $[(1+x)^{16}]$ и коэффициент при нем $C_{16}^4=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1820$ является искомым.

Ответ: коэффициент при ^{3} есть $C_{16}^4=1820$

Пример 4.16. Найти наибольшее слагаемое разложения $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$.

Решение. По условию задачи имеем $T_{m+1} > T_m T_{m+1} > T_{m+2}$, то есть:

$$C_{20}^{m}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{20-m}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m} > C_{20}^{m-1}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{20-m+1}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m-1},$$

$$C_{20}^{m}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{20-m}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m} > C_{20}^{m+1}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{20-m-1}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m+1}.$$

Или:

$$\frac{20!}{m!(20-m)!}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{20}}{\left(\sqrt{5}\right)^{m}}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m} > \frac{20!}{(m-1)!(20-m+1)!}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{21}}{\left(\sqrt{5}\right)^{m}}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{m}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{20!}{m!(20-m)!}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{20}}{\left(\sqrt{5}\right)^{m}}\left(\sqrt{2}\right)^{m} > \frac{20!}{(m+1)!(20-m-1)!}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{19}}{\left(\sqrt{5}\right)^{m}}\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^{m}$$

Это дает:

$$\frac{20\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} < m < \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}},\ 7,1 < m < 8,1.$$

Так как m натуральное число, получаем: $m = 8$. Тогда

$$T_{m+1} = T_9 = C_{20}^{8} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{8} = \frac{20!}{8! \cdot 2!} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{12} \left(\sqrt{2}\right)^{8} = 314925 \cdot 10^5$$

Ответ: $314925 \cdot 10^5$; девятое слагаемое.

4.3 Вопросы для самоподготовки

1. Чем занимается комбинаторный анализ?
2. Что такое генеральная совокупность объема $n-$множество)?
3. Принцип произведения в комбинаторике (основное правило комбинаторики);
4. Что такое перестановки из n по k? Примеры;
5. Что такое размещения из n по k? Примеры;
6. Что такое сочетания из n по k? Примеры;
7. В чем разница между размещениями и сочетаниями?
8. Что такое биномиальные коэффициенты?
9. Свойства биномиальных коэффициентов.
10. Запишите формулу Бинома Ньютона при $n = 2, 3, 4$.

4.4 Тесты по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

Таблица 6. Тесты по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

№	Задание	Варианты ответов
1	Вычислить C_{100}^{97}	1. 161700; 2. 151700; 3. 132700; 4.123700; 5. правильный ответ не указан.
2	По какой формуле находят комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые *отличаются либо составом элементов, либо их порядком*	1. $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ 2. $P_n = n!$ 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; 4. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 5. правильный ответ не указан.

Таблица 6. Тесты по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

№	Задание	Варианты ответов
3	По какой формуле находят комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые *отличаются только составом элементов*	1. $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ 2. $P_n = n!$; 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; 4. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 5. правильный ответ не указан.
4	По какой формуле находят комбинации, составленные из n элементов, которые *отличаются только их порядком*	1.$(a+b)^n$; 2. ${}_n = n!$; 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; 4. ${}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 5. правильный ответ не указан.
5	Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?	1. 13; 2. 10; 3. 30; 4.20; 5. правильный ответ не указан.
6	Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр $1,\ 2,\ 3$, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?	1. 10; 2. 12; 3. 6; 4. 14; 5. правильный ответ не указан.

Таблица 6. Тесты по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

№	Задание	Варианты ответов
7	Сколькими способами могут быть распределены уроки в день из 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день?	1. 30240; 2. 340; 3. 12340; 4. 540; 5. правильный ответ не указан.
8	Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?	1. 15; 2. 25; 3. 20; 4. 10; 5. правильный ответ не указан.
9	Сколько различных слов можно составить из букв слова «ЛОДКА» ?	1. 120; 2. 130; 3. 150; 4. 110; 5. правильный ответ не указан.
10	Число слагаемых в разложении степени бинома равно	1. $n+1$; 2. $n-1$; 3. n; 4. $2n$; 5. правильный ответ не указан.

4.5 Задачи для самостоятельной работы

1. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется.
2. Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости больше числа очков, появившихся на черной кости?
3. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей?
4. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?
5. Студенты разделились на две равные группы для розыска заблудившегося товарища. Среди них есть только 4 человека, знакомые с местностью. Каким числом способов они могут разделиться так, чтобы в каждую группу вошло 2 человека, знающих местность, если всего их 16 человек.
6. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы (всего по шесть одинаковых билетов каждого варианта) Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых билетов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?
7. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими

способами это может произойти?
8. Найти k и n, если $C_{n+2}^{k} : C_{n+2}^{k+1} : C_{n+2}^{k+2} = 0.6 : 1 : 1$.
9. Решить уравнение

$$A_x^{x-3} = xP_{x-2}.$$

10. Доказать тождество:

$$P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}).$$

11. Решить уравнение:

$$\frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720.$$

12. Решить уравнение:

$$\frac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$$

13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 270. \end{cases}$$

14.. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40\,. \end{cases}$$

15. При каких значениях x наибольшим слагаемым разложения $(5+3x)^{10}$ является четвертое?

16. При каком значении четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как $5:1$?

17. В разложении $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго. Найти свободный член.

18. Разность между некоторыми членами T_{m+1} и T_m разложения $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt{x^{-1}}\right)^{12}$ равна 30. Определить при каких значениях это возможно, если T_{m+1} содержит в степени, в двое меньшей, чем член T_m.

19. Найти коэффициент при x^9 в многочлене

$$(x+1)^9+(1+x)^{10}+\ldots+(1+x)^{14},$$

не раскрывая скобок.

20. Найти k-й коэффициент разложения $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^m$, если известно, что

$$T_{k+2}:T_{k+1}:T_k=28:8\sqrt{6}:9.$$

4.6 Варианты проверочной работы

Вариант 1.

1.Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

2. Проверьте равенство: $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^{8}}{P_8}$.

3. Сумма всех биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x.

Вариант 2.

1. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

2. Проверьте равенство: $C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$.

3. Сумма всех биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $\left(ax + x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ равна 512. Определить слагаемое, не содержащее x.

Вариант 3.

1. В классе 10 учебных предметов и 5 уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

2. Проверьте равенство: $C_{15}^4 - C_{15}^3 = C_{16}^4/2$.

3. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Вариант 4.

1. В кружке юных математиков 25 членов. Необходимо избрать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту руководящую четверку, если одно лицо может занимать только один пост?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 66\,. \end{cases}$$

3. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Вариант 5.

1. На плоскости расположено 10 точек так, что из них ни какие три, за исключением одной тройки точек, не лежат на одной прямой 0. Сколько разных прямых можно провести через эти точки?

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} C_n^k = C_n^{k+2}, \\ C_n^2 = 153\,. \end{cases}$

3. Третье слагаемое разложения $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ не содержит x. При каких значениях x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1 + x^3)^{30}$?

Вариант 6.

1. Сколько возможных способов для образования дозора из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} C_n^k = C_n^{k+1}, \\ A_n^2 = 20\,. \end{cases}$

3. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14400.

4.7 Ответы по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

Тесты										
№	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.
Ответ	1	3	4	2	3	3	1	4	1	1

Задачи для самостоятельной работы

1.120. 2. 15. 3. 36. 4. 1512. 5. 2772.
6. $2(6!)$. 7. $\frac{10!}{4}$. 8. $n = 5, k = 2$.
9. $x = 8$. 10.$x = 7$. 11. $x = 8;\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$. 12. $(5; 7)$. 13.$(5; 3)$.
14.$\frac{5}{8} < x < \frac{20}{21}$ 15. $\tilde{x} = 4$. 16. $C_{11}^3 = -165$. 17. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \ x_2 = 5\sqrt{5}$. 18. 3003. 19.*7290.*

Варианты проверочной работы

1. 56. 2. 240, 3-е слагаемое. 3. $C_{12}^5 = 792$ 4. $C_{10}^8 a^2 = 45a^2$. 5. $A_{10}^5 = 30240$
6. $\frac{15}{28} < x < \frac{10}{13}$. 7. $A_{10}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{10!}{4}$ 8. (12; 5). 9. $n = 5$. 10. 43. 11. $(18;\ 8)$.
12. $x = 2$. 13. 246480. 14. $(5;\ 2.)$ 15. 252.

Список литературы

[1] Сканави М.И. Полный сборник решений задач для поступающих в ВУЗЫ. Группа повышенной сложности - М., 1999. - 622 с.

[2] Звавич Л.И., Аверьянов Д.И., Смирнова И.К. Экзаменационные задачи по алгебре для школьников и абитуриентов. - М., 1996.- 205с.

[3] Самусенко А.В., Казаченок В.В. Математика и типичные ошибки абитуриентов. - Минск, 1991.- 192 с.

[4] Ершов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. - М.,1977. - 80 с.

[5] Скопец З.А. Дополнительные главы по курсу математики. Факультативный курс - М.,1974. - 255 с.

[6] Шахно К.У. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения . - М., - 1964. - 246 с.

[7] Соминский И.С. Элементарная алгебра. Дополнительный курс. - М.,1964. - 200 с.

[8] Давыдов А.К. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям.- М., 1955. -248 с.

Любовь Ивановна Лазарева

Алгебраические преобразования, комплексные числа, векторная алгебра, элементы комбинаторики и бином Ньютона

Учебное пособие для абитуриентов

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук,
профессор К.П. Арефьев

Редактор

Подписано к печати .01.2004.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл.печ.л. Уч.-изд.л. .
Тираж 200 экз. Заказ . Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.

Содержание