§ 2. Уравнения

В алгебре рассматривают два вида равенств – тождества и уравнения. Тождество – это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него букв. Для тождества используют знаки $=$, $\equiv$.

Уравнение – это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Буквы, входящие в уравнение по условию задачи могут быть неравноправными: они могут принимать все свои допустимые значения и называются коэффициентами (реже параметрами) уравнения; другие значения, которые требуется отыскать, называются неизвестными. Их обозначают x, y, z, … x_1, x_2, …

В общем виде уравнение с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots x_n$ может быть записано в виде:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

В зависимости от числа неизвестных уравнение называют с одним, двумя и более неизвестными.

Значения неизвестных, обращающие уравнение в тождество, называют решениями уравнения.

Уравнение считается решенным, если найдены все его решения, или показано, что уравнение решений не имеет.

Если все решения уравнения $F = 0$ являются решениями $Y = 0$, то говорят, что $Y = 0$ есть следствие уравнения $F(x) = 0$ $\quad F(x) \Rightarrow Y(x)$.

Два уравнения называются эквивалентными $F(x) = 0$ и $Y(x) = 0$, если каждое из них есть следствие другого

$$F(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(x) = 0.$$

Эквивалентными уравнениями называют уравнения, у которых решения совпадают.

Некоторые эквивалентные уравнения

1. $F + Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = 0;$
2. $F / Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = 0;$
3. $F \cdot Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = 0$ и $Y = 0;$
4. $F^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = 0;$
5. $F^n = Y^n$ при нечетном n $\quad F = Y$
   при четном n эквивалентно двум уравнениям:
   $F = Y$ и $F = -Y$.

Алгебраическим уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где n – целое неотрицательное число (число n называют степенью уравнения); $a_0, a_1, \ldots a_n$ – коэффициенты уравнения.

Значения неизвестного x, обращающие алгебраическое уравнение в тождество, называют корнями уравнения (или решениями).

Уравнение $ax + b = 0$ называется линейным, $x = -b/a$ – решение уравнения.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) называется квадратным уравнением. Для решения уравнения вычисляют $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение $x = -b/(2a)$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Теорема Виета: Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то выполняется следующее соотношение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b / a, \\ x_1 x_2 = c / a. \end{cases}$$

При решении задач, связанных с теоремой Виета полезно использовать соотношения:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}.$$

Примеры решения уравнений

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = 27.$

Решение. О.Д.З. $x \neq 3$. $\quad \dfrac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = 27,$

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 9 = 27, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad x^2 + 3x - 18 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2}, \quad x_1 = -6, \ x_2 = 3 \text{ не входит в О.Д.З.}$$

Ответ: $x = -6$.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}=4.$

Решение. Обозначим $z=\dfrac{x^2+x-5}{x}$, тогда получим уравнение $z+\dfrac{1}{z}=4,$ $\begin{cases} z^2-4z+3=0, \\ z\neq 0. \end{cases}$ Квадратное уравнение имеет корни $z_1=1$, $z_2=3$ (оба корня входят в О.Д.З).

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2+x-5}{x}=3.$$

Преобразуем их так $\begin{cases} x^2+x-5=x, \\ x\neq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+x-5=3x, \\ x\neq 0. \end{cases}$

$x_1=\sqrt{5},\ \ x_2=-\sqrt{5},$ или $x_3=1+\sqrt{6},\ \ x_4=1-\sqrt{6}.$

Все корни входят в область допустимых значений.

Ответ: $\sqrt{5},\ -\sqrt{5},\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}.$

Пример 3. Решить уравнение: $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47.$

Решение. Сгруппируем слагаемые $4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=47.$

Обозначим $y=x+\dfrac{1}{x}$, при этом заметим, что

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}, \text{ откуда } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Получим $4(y^2-2)+12y=47,$ $4y^2+12y-55=0.$

Это уравнение имеет корни $y_1=\dfrac{5}{2},$ $y_2=-\dfrac{11}{2}.$

1. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2},$ $\begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$ $x_1=2,\ x_2=1/2.$

2. $x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2}$, $\begin{cases} 2x^2 + 11x + 2 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ $x_1 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}$,

$$x_2 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}.$$

Все корни входят в О.Д.З.

Ответ: 2, 1/2, $\frac{-11 + \sqrt{105}}{4}$, $\frac{-11 - \sqrt{105}}{4}$.

Решение уравнений методом разложения на множители

Один из способов решения уравнений $P_n(x) = 0$ состоит в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители $P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x)$. Нахождение корней многочлена является трудной задачей и общего универсального способа найти корни указать нельзя.

Пример 4. Решить уравнение: $3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 = 0$.
Решение. Подбираем один из корней уравнения, например $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ – корень. Следовательно, $3x^3 - 4x^2 + 5x - 18$ разделится без остатка на $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3 - 6x^2 } & 3x^2 + 2x + 9 \\ 2x^2 + 5x - 18 & \\ \underline{2x^2 - 4x } & \\ 9x - 18 & \\ \underline{9x - 18} & \\ 0 & \end{array}$$

$3x^2 + 2x + 9 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot 9 \cdot 3 < 0$ – корней нет.
Следовательно, уравнение имеет один корень.

Ответ: $x = 2$.

Уравнение $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ при условии $a + b = c + d = l$ приводится к квадратному уравнению относительно неизвестной $y = x^2 + lx$.

Пример 5. Решить уравнение $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0{,}5625$.

Решение. $x(x + 3)(x + 2)(x + 1) = 0{,}5625$, $0 + 3 = 1 + 2$.

Сделаем замену переменной $x^2 + 3x = y$, получим $y^2 + 2y -$ $-$ $0{,}5625 = 0$. Определяем корни уравнения: $y_1 = 0{,}25$; $y_2 = 2{,}25$.

1. $x^2 + 3x = 0{,}25$,

$4x^2 + 12x - 1 = 0$, $D = 144 + 16 = 160$,

$$x_1 = \frac{-12 + 4\sqrt{10}}{8} = \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}, \; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{10}}{2}.$$

2. $x^2 + 3x + 2{,}25 = 0$, $D = 0$, $x_3 = -3/2$.

Уравнения, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Модуль положительного числа есть само число, модуль отрицательного числа есть число ему противоположное. Модуль нуля есть нуль.

Свойства модуля:

1. $|x| \geq 0$; 2. $|-a| = a$; 3. $|ab| = |a|\cdot|b|$;

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 5. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$;

6. $|x| < c \; (c > 0) \Leftrightarrow -c < x < c$;

7. $|x| > c \; (c > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -c, \\ x > c. \end{array}\right.$ 8. $|a|^2 = a^2$.

При решении уравнений, содержащих модуль, рассматривают несколько приемов решения. Рассмотрим один из них «метод интервалов».

Пример 6. Решить уравнение $|2x + 5| + 2|x| = |x + 2| + |x + 7|$. В ответе указать меньший корень.

Решение. Определим критические точки:

$2x + 5 = 0$,	$x = 0$,	$x + 2 = 0$,	$x + 7 = 0$,
$x = -2{,}5$.	$x = 0$.	$x = -2$.	$x = -7$.

Определим точки, в которых модуль обращается в нуль. Отметим эти значения x на числовой прямой и исследуем уравнение на каждом из полученных интервалов.

Решим задачу на каждом промежутке.

1. $-\infty < x \le -7$, $-2x - 5 - 2x = -x - 2 - x - 7$,
$-2x = -4$, $x = 2$ (не входит в рассматриваемый промежуток).
2. $-7 < x \le -2{,}5$, $-2x - 5 - 2x = -x - 2 + x + 7$,
$-4x = 10$, $x = -2{,}5$ (входит в рассматриваемый промежуток).
3. $-2{,}5 < x \le -2$, $2x + 5 - 2x = -x - 2 + x + 7$, $5 = 5$,
уравнение выполняется при всех x из рассматриваемого промежутка.
4. $-2 < x \le 0$, $2x + 5 - 2x = x + 2 + x + 7$,
$-2x = 4$, $x = -2$ (не входит в рассматриваемый промежуток).
5. $x > 0$, $2x + 5 + 2x = x + 2 + x + 7$,
$2x = 4$, $x = 2$.
Итак, $[-2{,}5; -2] \cup \{2\}$. *Ответ*: $-2{,}5$.

Пример 7. Решить уравнение $|x| + |x - 1| = 1$.
Решение. $x = 0$, $x = 1$.

1. $x \in (-\infty; 0)$, тогда $-x - x - 1 = 1$, $-2x = 0$, $x = 0$, $x \notin (-\infty; 0)$.
2. $x \in [0; 1)$, тогда $x - x + 1 = 1$, $1 = 1$, x любое из $[0; 1)$.
3. $x \in [1; +\infty)$, тогда $x + x - 1 = 1$, $2x = 2$, $x = 1$.

Ответ: $x \in [0; 1]$.

Пример 8. Решить уравнение $|x^2 - 14| = |x^2 - 4|$.
Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат, получим эквивалентное уравнение $(x^2 - 14)^2 = (x^2 - 4)^2$,

$$x^4 - 28x^2 + 196 = x^4 - 8x^2 + 16, \quad 20x^2 = 180,$$
$$x^2 = 9, \quad x = \pm 3.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Пример 9. Решить уравнение $|5x + 2| = 3 - 3x$.
Решение. Используя определение модуля, решим уравнение. Данное уравнение эквивалентно совокупности систем:

$$\begin{cases} 5x+2=3-3x, \\ 3-3x\ge 0, \\ 5x+2\ge 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -5x-2=3-3x, \\ 3-3x\ge 0, \\ 5x+2<0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 1/8$, $x_2 = -5/2$.

Системы алгебраических уравнений

Рассмотрим некоторые методы решения систем уравнений.

1. Способ подстановки: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другое и подставляем в оставшиеся уравнения.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения $y = x + 1$ и подставим в первое:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 41, \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 41,$$

$$2x^2 + 2x - 40 = 0, \quad x^2 + x - 20 = 0, \quad x_1 = -5, \ x_2 = 4.$$

При $x_1 = -5$, $y_1 = -5 + 1 = -4$.

При $x_2 = 4$, $y_2 = 4 + 1 = 5$.

Ответ: (–5; –4); (4; 5).

2. Способ алгебраического сложения. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым уравнением.

$y^3 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 125$, $(x + y)^3 = 125$, $x + y = 5$.

$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 20$.

$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4. \end{cases}$ Эту систему решаем методом подстановки.

$y = 5 - x$, $x(5 - x) = 4$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

При $x_1 = 4$, $y_1 = 5 - 4 = 1$.

При $x_2 = 1$, $y_2 = 5 - 1 = 4$.

Ответ: (4; 1); (1; 4).

3. Способ введения новых переменных. Суть этого метода рассмотрим на примере.

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+2xy=7, \\ xy+2(x+y)=8. \end{cases}$

Решение. Обозначим $x+y=a, \quad xy=b.$

Получим систему уравнений $\begin{cases} a+2b=7, \\ b+2a=8. \end{cases}$

Отсюда $a=3, \quad b=2.$

Возвращаясь к переменным x и y получим $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$

$y=3-x, \qquad (3-x)\,x=2. \quad x_1=2, \quad x_2=1.$
$y_1=3-2=1, \quad y_2=3-1=2.$

Ответ: (1; 2); (2; 1).

2. решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{x^2-xy}=t; \quad \dfrac{1}{y^2-xy}=z.$

Тогда получим $\begin{cases} 5t+4z=-\dfrac{1}{6}, \\ 7t-3z=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$ Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4 почленно.

$$15t+28t=-\frac{1}{2}+\frac{24}{5} \quad \Rightarrow \quad 43t=\frac{43}{10}, \quad t=0{,}1.$$

Подставим t и определим $z=-1/6$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - xy} = \dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ y^2 - xy = -6. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы $(x - y)^2 = 4$, $|x - y| = 2$.

Получим 1. $\begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = 2. \end{cases}$ $2x = 10$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

2. $\begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = -2. \end{cases}$ $-2x = 10$, $x_1 = -5$, $y_1 = -3$.

Ответ: (5; 3); (–5; –3).

4. Система содержит однородное уравнение.

Рассмотрим пример $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Разделим первое уравнение на y^2, $y \neq 0$.

Получим $\dfrac{x^2}{y^2} - 5\dfrac{x}{y} + 6 = 0$, $\dfrac{x}{y} = t$, $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

$\dfrac{x}{y} = 2$, $x = 2y$, $\dfrac{x}{y} = 3$, $x = 3y$.

Подставим в $x^2 + y^2 = 10$, получим

1. $y^2 + 4y^2 = 10$, $y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 2y = \pm 2\sqrt{2}$.

2. $y^2 + 9y^2 = 10$, $y = \pm 1$, $x = 3y = \pm 3$.

Ответ: (3; 1); (–3; –1).
$\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right); \left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.

5. Иногда при решении систем уравнений следует проявить смекалку (решение нестандартных уравнений).

Пример. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}. \end{cases}$

Решение. Перемножим почленно данные уравнения

$$\sqrt{\frac{20y}{x}\cdot\frac{16x}{5y}}=(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x-y})^2, \text{ т.е.}$$

$$8=x+y-x+y,\ 2y=8,\quad y=4.$$

Теперь сложим почленно: $\sqrt{\frac{20y}{x}}+\sqrt{\frac{16x}{5y}}=2\sqrt{x+y}$ и подставим y = 4.

$$\sqrt{\frac{20\cdot 4}{x}}+\sqrt{\frac{16x}{20}}=2\sqrt{x}.$$

Возведем в квадрат: $\frac{80}{x}+\frac{16x}{20}+2\frac{80}{x}\cdot\frac{16x}{20}=4x,$

$$4x+16x^2+144=4x,\quad 16x^2=144,\quad x=12/4=3.$$

Ответ: $x=3$, $y=4$.

§ 3. Неравенства

Совокупность двух выражений, соединенных между собой знаком больше (>) или меньше (<) называется неравенством.

I. *Линейными неравенствами* называются неравенства вида:

$$ax+b>0,\quad ax+b<0,\quad ax+b\ge 0,\quad ax+b\le 0,\ a\ne 0,$$

решениями которых будут:

При $a>0$ $x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$, $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$, $x\in\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)$, $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]$.

При $a<0$ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$, $x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$, $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]$; $x\in\left[-\frac{b}{a};\infty\right)$.

Пример 1. Решить неравенство $x-\frac{x+1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

Решение. Приведем к общему знаменателю:

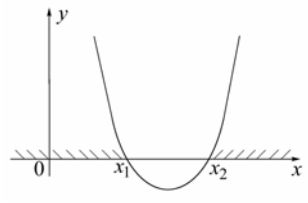
$$\frac{12x-6x-6-3x+4x-8+9}{12}>0,$$

$$\frac{7x-5}{12}>0,\quad 7x>5,\quad x>5/7,\quad x\in(5/7;+\infty).$$

Ответ: $(5/7;+\infty)$.

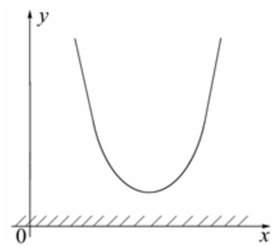
II. *Квадратные неравенства* $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $a \neq 0$.

При $a > 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$.



$$x \in \left(-\infty; \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \infty\right).$$

Если $a > 0$, $D < 0$,
то $x \in (-\infty; +\infty)$.



Но лучше решить неравенство методом интервалов:

1. Квадратный трехчлен разложим на множители

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \text{ (или } < 0).$$

2. Корни многочлена наносят на числовую ось.
3. Строим «змейку», проходящую через корни.

Пример 2. Решить неравенство: $x^2 + x - 6 > 0$.

Решение. Разложим квадратный трехчлен на множители

$$(x + 3)(x - 2) > 0.$$

Отметим на числовой прямой и строим «змейку», проходящую через точки $x = -3$ и $x = 2$.

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty).$$

Пример 3. Решить неравенство: $x^2 - 8x + 16 > 0$.

Решение. $(x - 4)^2 > 0$, оно верно при любом x, кроме $x = 4$.

Ответ: $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Рациональные неравенства вида $P_n(x) > 0$ $(P_n(x) < 0)$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно степеней n и m обычно решают методом интервалов.

Решение рациональных неравенств основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ и между этими точками не имеет других корней, то в промежутке (x_1, x_2) сохраняет знак. Поэтому для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ поступают так:

1. На числовой прямой отмечают все точки, в которых $f(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция непрерывна и не обращается в 0, т.е. сохраняет знак.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $f(x)$ на каждом из полученных промежутков.

Изменение знаков функции $f(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0.$

Решение. Нули многочлена, стоящего в знаменателе: $x = -1$, $x = -2$.

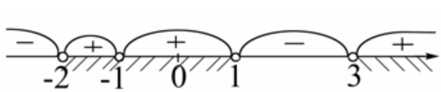
Нули многочлена, стоящего в числителе, легко находятся
$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(x - 1)(x + 1).$

Неравенство запишем в виде:

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} > 0.$$

Критические точки рациональной функции $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

Числовая ось разбивается этими точками на 5 интервалов.



$x \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty).$

Иногда в неравенствах в числителе или знаменателе есть множитель $(x-a)^k$, где k – четное и $(x-a)^k > 0$, $x \neq a$. При этом условии обе части неравенства можно умножить или разделить на $(x-a)^k$, сохранив при этом знак неравенства.

Если в числителе или знаменателе есть множитель $(x-a)^k$, где k – нечетное, то при любых значениях a, это выражение имеет тот же знак, что и выражение $x-a$. Замена приводит к более простому неравенству, равносильному первоначальному.

Пример 4. Решить неравенство: $\dfrac{x^2(3x-4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^8} \leq 0.$

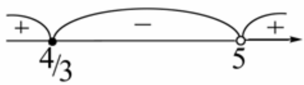
Решение. Заменим $(3x-4)^3$ на $3x-4$ и $(x-5)^5$ на $x-5$, получим неравенство, равносильное первоначальному

$$\frac{x^2(3x-4)(x-2)^4}{(x-5)(2x-7)^8} \leq 0.$$

В неравенствах содержатся множители x^2, $(x-2)^4$, $(2x-7)^8$ с четными показателями. При значении $x = 0$, $x = 2$, $x = 3{,}5$ эти множители обращаются в 0.

$x = 0$ и $x = 2$ – решения неравенства.

Разделив обе части неравенства на $\dfrac{x^2(x-2)^4}{(2x-7)^8}$, получим неравенство $\dfrac{3x-4}{x-5} \leq 0.$



$$x \in \left[-\frac{4}{3};5\right),\ x = 0,\ x \neq 3{,}5.$$

Имеем: $\{0\} \cup \left[\dfrac{4}{3};3{,}5\right) \cup (3{,}5;\,5).$

III. <u>Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.</u>

При решении неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, используется тот же прием, что и при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины.

При решении уравнений и неравенств с модулем используют:

1. Определение модуля: $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

2. Основные свойства модуля:

– Модуль вещественного числа, есть число неотрицательное: $|a| \geq 0$; $|a| = 0$ только для $a = 0$.

– Противоположные числа имеют равные модули $|a| = |-a|$.

– $|a| = \sqrt{a^2}$, где под квадратным корнем понимается арифметическое значение.

3. а) Неравенство $|x| < a$, где $a > 0$ равносильно $-a < x < a$.

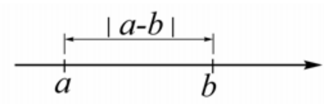
б) Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$ равносильно совокупности двух неравенств $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$

в) $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

г) Для модуля суммы и разности

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \ |a - b| \geq |a| - |b|.$$

д) Модуль разности двух вещественных чисел a и b есть расстояние между точками a и b на числовой оси.



<u>Замечание.</u> Уравнения и неравенства с модулем решаются на множестве вещественных чисел.

Пример 5. Решить неравенство: $|x^2 - 2| + x < 0$.

Решение. Используя определение модуля

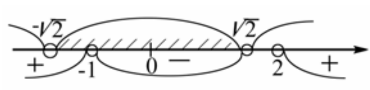
1. $\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases}$ и 2. $\begin{cases} x^2 - 2 < 0, \\ -x^2 + x + 2 < 0. \end{cases}$

Решим каждую из систем.

1. $x \in \left[-2; -\sqrt{2}\right]$.

$x^2 + x - 2 \leq 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

2. $\begin{cases} x^2 - 2 < 0, \\ -x^2 + x + 2 < 0. \end{cases}$

$x^2 - x - 2 > 0, \quad x_1 = 2, \; x_2 = -1,$ 

$x \in \left[-\sqrt{2}; -1\right]$.

Объединяя найденные множества решений, получаем (–2; –1).

Ответ: $x \in (-2; -1)$.

Решения более сложных неравенств основано на методе интервалов.

Пример 6. Решить неравенство: $|3 - x| + |2x - 4| - |x + 1| > 2x + 4$.

Решение. Определим критические точки:

$$3 - x = 0, \qquad 2x - 4 = 0, \qquad x + 1 = 0,$$
$$x = 3. \qquad x = 2. \qquad x = -1.$$

Отметим точки на числовой прямой

1. $x \le -1 \Rightarrow |x + 1| = -x - 1, \;\; |3 - x| = 3 - x, \;\; |2x - 4| = 4 - 2x.$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x + 4 - 2x + x + 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1].$$

2. $-1 < x \le 2 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \;\; |3 - x| = 3 - x, \;\; |2x - 4| = 4 - 2x.$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x + 4 - 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < 1/3 \Rightarrow x \in (-1; 1/3).$$

3. $2 < x \le 3 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \;\; |3 - x| = 3 - x, \;\; |2x - 4| = 2x - 4$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x - 4 + 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < -2 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

4. $x \ge 3 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \;\; |3 - x| = x - 3, \;\; |2x - 4| = 2x - 4.$

Неравенство принимает вид:

$$x - 3 - 4 + 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow 0\,x > 12 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1/3)$.

Пример 7. Решить неравенство: $\dfrac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \dfrac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$.

Решение. $\dfrac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2} < \dfrac{(|x-3|+|x-2|)(|x-4|+|x-1|)}{|x-4|(|x-3|+|x-2|)}$

(так как $|x-4|+|x-1|>0$ и $|x-3|+|x-2|>0$ при всех x)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-3(2x-5)}{-(2x-5)} < \frac{|x-4|+|x+1|}{|x-4|} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3|x-4| < |x-4|+|x-1|, \\ x \neq \dfrac{5}{2}, \quad 4. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-8)^2 < (x-1)^2, \\ x \neq 5/2, \quad 4. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3x-9)(x-7)<0, \\ x \neq 5/2, \quad 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<7, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 4) \cup (4;\ 7)$.

§ Уравнения и неравенства с параметрами

Уравнения

Рассмотрим уравнение с параметрами a, b, …, c и неизвестными x, y, …, z:

$$F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z) = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что найдено множество его решений. Очевидно, что это множество представляет совокупность наборов вида:

$$\{a, b, \ldots, c, x(a, b, \ldots, c), y(a, b, \ldots, c), \ldots, z(a, b, \ldots, c)\}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим равенство, справедливое для всех наборов $\{a, b, \ldots, c\}$:

$$F(a, b, \ldots, c, x(a, b, \ldots, c), y(a, b, \ldots, c), \ldots, z(a, b, \ldots, c)) \equiv 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) определяет набор неявных функций $x(a, b, \ldots, c)$, $y(a, b, \ldots, c)$, …, $z(a, b, \ldots, c)$, которые мы и должны найти при решении уравнения с параметрами a, b, …, c и неизвестными функциями x, y, …, z.

Искомые функции x, y, …, z могут быть и многозначными.

Найти неявные функции $x(a, b, \ldots, c)$, $y(a, b, \ldots, c)$, …, $z(a, b, \ldots, c)$ – это значит найти области их определения и их явное задание.

Неравенства

Рассмотрим неравенство с параметрами

$$F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z) > 0 \qquad \text{и} \qquad (4)$$

$$F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z) < 0. \qquad (5)$$

Множество решений неравенства (4) обозначим D_+, а неравенства (5) обозначим D_-. Пусть D – область определения, а D_0 – область решения уравнения (1), тогда, если некоторая точка области определения D не принадлежит области D_0 – области решения уравнения, то эта точка удовлетворяет либо неравенству (4), либо неравенству (5) и наоборот. Следовательно,

$$D \setminus D_0 = D_+ \cup D_- \qquad (6)$$

Из (6) следует, что задача отыскания решений неравенств (4) или (5) сводится к задаче о знаке функции $F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z)$ в точках множества (6).

Как правило функция $F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z)$ непрерывная, поэтому решать неравенства (4) и (5) можно методом областей. Суть этого метода заключается в том, что нужно разбить множество $D \setminus D_0$ на связные области, которые будут областями знакопостоянства функции $F(a, b, \ldots, c, x, y, \ldots, z)$.

Решение уравнений с параметрами

Общий признак решения уравнения с параметрами заключается в том, что при решении уравнения с параметрами мы должны работать ни с одним уравнением, а с системой, содержащей само уравнение и тех неравенств, которые задают область определения этого уравнения.

Эта исходная система постепенно заменяется равносильными ей системами, которые становятся все проще и проще до тех пор, пока не получится система – ответ.

Переход от одной равносильной системы к другой совершается на основании свойств уравнений и неравенств, а также правил, из которых наиболее употребительно правило отсечения и правило подстановки.

<u>Правило отсечения:</u> пусть задана система уравнений и неравенств в области D. Если тем или иным способом мы отсекаем от области D определенную часть ее, в которой нет решений данной системы, то получим новую систему, равносильную исходной системе.

<u>Правило подстановки:</u> пусть удалось каким-либо образом выразить неизвестное через параметр: $x = f(a)$. Подставим вместо x во все остальные неравенства системы $f(a)$, тогда получим систему, из которой определяются условия, при которых возможно решение $x = f(a)$:

$$\begin{cases} F(a,x)=0, \\ \Psi_1(a,x)\ge 0, \\ \Psi_2(a,x)\ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Psi_k(a,x)\ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=f(a), \\ \Psi_1(a,f(a))\ge 0, \\ \Psi_2(a,f(a))\ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Psi_k(a,f(a))\ge 0. \end{cases}$$

Пример 1. Для всех a найти решение уравнения: $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$.
Решение. Применим правило отсечения.

$$\begin{cases} \sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}, \\ a\in R, \\ x\ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}, & (1) \\ a+x\ge 0, & (2) \\ a-\sqrt{x}\ge 0, & (3) \\ x\ge 0. & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

Из соотношения (3) следует $a\ge\sqrt{x}$, а так как $\sqrt{x}\ge 0$, то $a \ge 0$. Таким образом, нам удалось отсечь $a < 0$, тогда (2) выполняется.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}, \\ a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases}$$

Так как правая часть и левая положительны, то можем возвести в квадрат

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x=a^2-2a\sqrt{x}+x, \\ a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-a-2a\sqrt{x}=0x, \\ a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(a-1-2\sqrt{x})=0, \\ a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ x=0. \end{cases}; \begin{cases} 2\sqrt{x}=a-1, \\ a\ge 0, \\ x\ge 0, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

левая часть первого соотношения неотрицательна, поэтому отсекаем $0 < a < 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x = 0. \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(a-1)^2}{4}, \\ a \ge 1, \\ x \ge 0, \\ a \ge \sqrt{x}. \end{cases}$$

Ответ: при $a = 0$ $x = 0$,
при $a < 0$ и $0 < a < 1$ – решений нет,
при $a \ge 1$ $x = \dfrac{(a-1)^2}{4}$.

При решении этого примера мы дважды отсекали из области $D(-\infty < a < +\infty)$ части, где нет решений: первый раз интервал $(-\infty; 0)$, а второй раз интервал $(0; 1)$ для параметра a.

Пример 2. Для всех значений параметра a решить уравнение:

$$\sqrt{3x+7} = \sqrt{2x+5a}.$$

Решение. Применим правило подстановки.

$$\begin{cases} \sqrt{3x+7} = \sqrt{2x+5a}, \\ 3x+7 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+7 = 2x+5a, \\ 3x+7 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 3x+7 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 3(5a-7)+7 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 15a-14 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ a \ge 14/15. \end{cases}$$

Ответ: при $a < 14/15$ – решений нет,
при $a \ge 14/15$ $x = 5a - 7$.

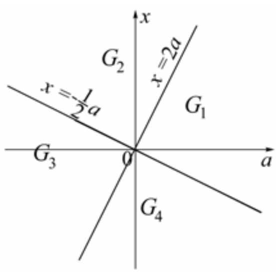
Пример 3. Решить неравенство: $|2x + a| + |x - 2a| < 20$.

Решение. Согласно изложенной теории нужно сначала рассмотреть уравнение. Решение неравенства иллюстрируем графически. Для этого рассмотрим плоскость (a, x). Найдем области этой плоскости, где подмодульные выражения равны нулю:

$$2x + a = 0 \qquad \text{и} \qquad x - 2a = 0.$$

Совершенно очевидно, что это две прямые $x = -a/2$ и $x = 2a$.

Построим эти прямые.



Эти две прямые разбивают всю плоскость (a, x) на 4 части. Обозначим их

G_1, G_2, G_3 и G_4. Найдем знаки подмодульных выражений в этих областях, для этого построим таблицу.

Области	G_1	G_2	G_3	G_4
$2x - a$	+	+	–	–
$x - 2a$	–	+	+	–

Из анализа этой таблицы следует, что придется решать 4 уравнения для 4-х областей.

Для области G_1: $2x + a - x + 2a = 20$, $x = -3a + 20$.

Для области G_2: $2x + a + x - 2a = 20$, $x = (1/3)a + 20/3$.

Для области G_3: $-2x - a + x - 2a = 20$, $x = -3a - 20$.

Для области G_4: $-2x - a - x + 2a = 20$, $x = (1/3)a - 20/3$.

Построим в этих 4-х областях соответствующие прямые:

В области G_1 прямую $x = -3a + 20$.

В области G_1 прямую $x = (1/3)a + 20/3$.

В области G_1 прямую $x = -3a - 20$.

В области G_1 прямую $x = (1/3)a - 20/3$.

Для этого найдем точки пересечения граничных прямых областей с прямыми в этих областях.

Обозначим точку пересечения прямой $x = 2a$ с прямой $x = -3a + 20$ A_1, точку пересечения прямой $x = 2a$ с прямой $x = (1/3)a + 20/3$. A_2.

$$\begin{cases} x = 2a, \\ x = -3a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 2a = -3a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 5a = 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ a = 4. \end{cases} \quad A_1(4;\ 8).$$

$$\begin{cases} x = 2a, \\ x = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 2a = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 6a = a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ a = 4. \end{cases} A_2(4;\ 8).$$

Как видим эти точки совпали, обозначим эту точку $A(4;\ 8)$.

$$B_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \quad B_1(-8;\ 4). \qquad B_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = -3a - 20. \end{cases} \quad B_2(-8;\ 4).$$

$$B_1 = B_2 = B(-8;\ 4).$$

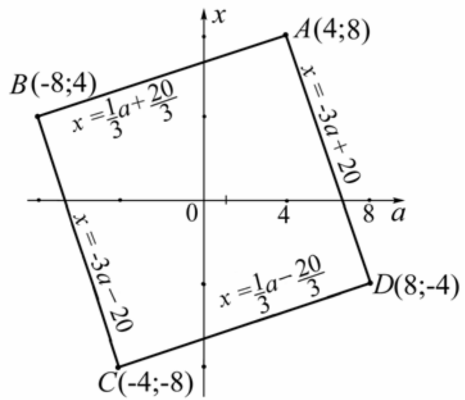
C_1: $\begin{cases} x = 2a, \\ x = -3a - 20. \end{cases}$ $C_1(-4; -8)$. C_2: $\begin{cases} x = 2a, \\ x = \dfrac{1}{3}a - \dfrac{20}{3}. \end{cases}$ $C_2(-4; -8)$.

$$C_1 = C_2 = C(-4; -8).$$

D_1: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}a, \\ x = \dfrac{1}{3}a - \dfrac{20}{3}. \end{cases}$ $D_1(8; -4)$. D_2: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}a, \\ x = -3a + 20. \end{cases}$ $D_2(8; -4)$.

$$D_1 = D_2 = D(8; -4).$$

Построим прямые, на которых выполняется равенство $|2x + a| + |x - 2a| = 20$.



Эти четыре прямые разбили всю плоскость (a, x) на две связные области: на «внутреннюю» часть квадрата и «внешнюю» часть квадрата.

Согласно изложенной теории нужно теперь расставить знаки функции $F = |2x + a| + |x - 2a| - 20$ в двух полученных областях и затем записать ответ. Для этого возьмем точку внутри квадрата (0; 0)

$$F\,(0; 0) = |0 + 0| + |0 - 0| - 20 < 0.$$

Таким образом, для всех внутренних точек квадрата выполняется решаемое неравенство.

Ответ: при $-\infty < a < -8$ – решений нет;
при $-\infty < a < -4$ – $-3a - 20 < x < (1/3)a + (20/3)$;
при $-4 < a < 4$ – $(1/3)a - (20/3) < x < (1/3)a + (20/3)$;
при $4 < a < 8$ – $(1/3)a - (20/3) < x < -3a + 20$;
при $a > -8$ – решений нет.

Пример 4. Для всех допустимых значений параметра a решить уравнение $\sqrt{4 + ax} = x + 2$.

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

D: $\begin{cases} 4+ax \ge 0, \\ a \in R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ x \in R. \end{cases}, \begin{cases} a>0, \\ x \ge -4/a. \end{cases}, \begin{cases} a<0, \\ x \le -4/a. \end{cases}$

Решаем уравнение.

$$\begin{cases} \sqrt{4+ax}=x+2, \\ D. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4+ax}=x+2, \\ D, \\ x+2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+ax=(x+2)^2, \\ D, \\ x \ge -2, \\ 4+ax \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+ax=x^2+4x+4, \\ D, \\ x \ge -2, \\ 4+ax \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-a+4)=0, \\ a \in R, \\ x \ge -2, \\ 4+ax \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ x=a-4, \\ a \in R, \\ x \ge -2,\ ax+4 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0, \\ 0 \ge -2, \\ 4 \ge 0. \end{cases}, \begin{cases} x=a-4, \\ a-4 \ge -2, \\ a(a-4)+4 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ a \in R. \end{cases}, \begin{cases} x=a-4, \\ a \ge 2, \\ a^2-4a+4 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

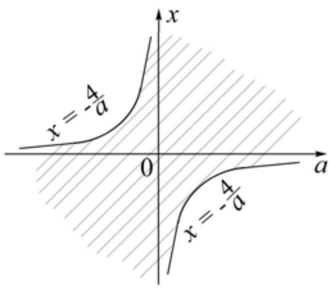
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ a \in R. \end{cases}, \begin{cases} x=a-4, \\ a \ge 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R, \\ x=0. \end{cases}, \begin{cases} a \ge 2, \\ x=a-4. \end{cases}$$

Ответ: при любом a, $x=0$ и
при $a \ge 2$, $x=a-4$ и $x=0$.

Перейдем теперь к решению неравенств. Для этого из области определения нужно убрать множество решений уравнения.

Построим область определения уравнения:

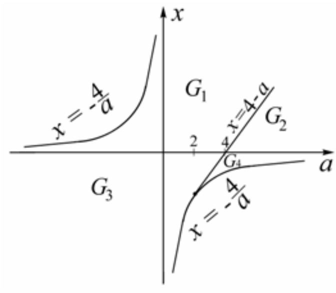
D: $\begin{cases} a=0, \\ x \in R. \end{cases}, \begin{cases} a>0, \\ x \ge -4/a. \end{cases}, \begin{cases} a<0, \\ x \le -4/a. \end{cases}$



Область определения уравнения представляет заштрихованную часть.

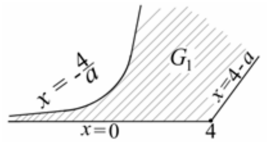
Для решения неравенств $\sqrt{4+ax} > x+2$ и $\sqrt{4+ax} < x+2$ согласно теории нужно убрать множество D_0 из D.

D_0: $\begin{cases} a \in R, \\ x = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} a \ge 2, \\ x = a - 4. \end{cases}$, т.е. убрать две прямые: ось a и при $a \ge 2$ прямую $x = a - 4$.

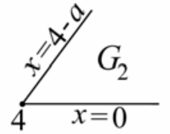


Вся область определения при этом разбилась на 4 области:

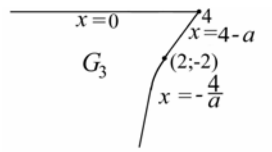
G_1:



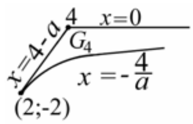
G_2:



G_3:



G_4:



Области G_1, G_2, G_3, G_4 задаются следующими системами и совокупностями неравенств:

G_1: $\begin{cases} a < 0, \\ 0 < x < -(4/a), \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le a < 4, \\ x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 4, \\ x > a - 4. \end{cases}$;

G_2: $\begin{cases} a > 0, \\ 0 < x < a - 4. \end{cases}$;

G_3: $\begin{cases} a \le 0, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a \le 2, \\ -(4/a) < x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < a < 4, \\ a - 4 < x < 0. \end{cases}$;

G_4: $\begin{cases} 2 < a \le 4, \\ -(4/a) < x < a - 4, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 4, \\ -(4/a) < x < 0, \end{cases}$.

Неравенство $\sqrt{4 + ax} > 2 + x$ справедливо на G_2 и G_3, а неравенство $\sqrt{4 + ax} < 2 + x$ справедливо на областях G_1 и G_4. Это легко проверить, подставив координаты любой точки из областей G_1, G_2, G_3, G_4 в функцию $F(a, x) = \sqrt{4 + ax} - x - 2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: $\log_2(13x + 8) = \log_2(5x + 2a)$.

Ответ: при $a > \dfrac{20}{13}$, $x = \dfrac{a-4}{4}$, при $a \le \dfrac{20}{13}$ решений нет.

2. При каких a уравнение $\dfrac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = \pm 2$, $a = -(10/3)$.

3. Решить уравнение: $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$.

Ответ: при $a \ne 0$, $x = 1$,
при $a = 0$, $x = \pm 1$.

4. Решить уравнение: $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

Ответ: если $a < 1$, то x = а или $x = 1$;
если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x = a$.

5. Решить неравенство: $(a-1)\sqrt{x} \le 0$.

Ответ: при $a \le 1$, $x \ge 0$,
при $a > 1$, $x = 0$.

6. Решить уравнение: $|x + 2a| + |2a - x| = 4$.

Ответ: при $-\infty < a < -1$, решений нет,
при $a = -1$, $-2 \le x \le 2$,
при $-1 < a < 1$, $x = \pm 2$,
при $a = 1$, $-2 \le x \le 2$,
при $a > 1$, решений нет.

7. Решить неравенство: $|x + 2a| + |2a - x| < 4$.

Ответ: при $-2 < a < 2$, $-1 < x < 2$,
при остальных a решений нет.

8. Решить уравнение: $\dfrac{x-a}{x-1} = 0$.

Ответ: при $a \ne 1$, $x = a$, при $a = 1$ решений нет.

9. При каких a уравнение $ax^2 - 4x + 3 + a$ имеет два корня?

Ответ: $-4 < a < 0$ и $0 < a < 1$.

10. Решить неравенство: $(x - a)(x - 2)(x - 3) > 0$.

Ответ: при $a < 2$, $a < x < 2$ и $x > 3$,
при $a = 2$, $x > 3$,
при $2 < a < 3$, $2 < x < a$ и $x > 3$,
при $a = 3$, $2 < x < 3$ и $x > 3$,
при $a > 3$, $2 < x < 3$ и $x > a$.

Тест (решение неравенств)

1. Решить неравенство: $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$

1. $(-\infty; -7) \cup (-4; -2)$; *2*. $(-\infty; -7] \cup [-4; -2]$;
3. $(-7; -4) \cup (-2; +\infty)$; *4*. Правильный ответ не указан.

2. Решить неравенство: $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geq 5.$

1. $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$; *2*.$[-2; -1]$;
3. $(-\infty; -4) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; *4*. Правильный ответ не указан.

3. Решить неравенство: $(x^2-2x)(2x-2) - 9\dfrac{2x-2}{x^2-2x} \leq 0.$

1. $(-\infty; -1] \cup [0; 1] \cup [2; 3]$; *2*. $(-\infty; -1) \cup (0; 1] \cup [2; 3]$;
3. $(-1; 0) \cup (1; 2)$; *4*. Правильный ответ не указан.

4. Укажите число целых решений неравенства: $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+5x} \leq \dfrac{1}{x+5}.$

1. 5; *2*. *3*. *4*. Правильный ответ не указан.

5. Решить неравенство: $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2.$

1. *2*. *3*. *4*. Правильный ответ не указан.

6. Укажите число целых решений $\dfrac{x^2-16x+64}{(x-8)(x-10)} \geq -1,$ принадлежащих отрезку [7; 12].

1. 4; *2*. 0; *3*. 3; *4*. Правильный ответ не указан.

7. Решить неравенство $|x-1| < 2x-5.$ В ответе указать наименьшее число.

1. 5; *2*. 6; *3*. 0; *4*. Правильный ответ не указан.