

§ 2. Уравнения

В алгебре рассматривают два вида равенств – тождества и уравнения. Тождество – это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него букв. Для тождества используют знаки $=$, \equiv .

Уравнение – это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Буквы, входящие в уравнение по условию задачи могут быть неравноправными: они могут принимать все свои допустимые значения и называются коэффициентами (реже параметрами) уравнения; другие значения, которые требуется отыскать, называются неизвестными. Их обозначают x, y, z, \dots
 x_1, x_2, \dots

В общем виде уравнение с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n может быть записано в виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

В зависимости от числа неизвестных уравнение называют с одним, двумя и более неизвестными.

Значения неизвестных, обращающие уравнение в тождество, называют решениями уравнения.

Уравнение считается решенным, если найдены все его решения, или показано, что уравнение решений не имеет.

Если все решения уравнения $F = 0$ являются решениями $Y = 0$, то говорят, что $Y = 0$ есть следствие уравнения $F(x) = 0 \quad F(x) \Rightarrow Y(x)$.

Два уравнения называются эквивалентными $F(x) = 0$ и $Y(x) = 0$, если каждое из них есть следствие другого

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y(x) = 0.$$

Эквивалентными уравнениями называют уравнения, у которых решения совпадают.

Некоторые эквивалентные уравнения

1. $F + Y = Y \Leftrightarrow F(x) = 0;$

2. $F / Y = 0 \Leftrightarrow F = 0;$

3. $F \cdot Y = 0 \Leftrightarrow F = 0$ и $Y = 0;$

4. $F^n = 0 \Leftrightarrow F = 0;$

5. $F^n = Y^n$ при нечетном $n \quad F = Y$
при четном n эквивалентно двум уравнениям:
 $F = Y$ и $F = -Y$.

Алгебраическим уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где n – целое неотрицательное число (число n называют степенью уравнения); a_0, a_1, \dots, a_n – коэффициенты уравнения.

Значения неизвестного x , обращающие алгебраическое уравнение в тождество, называют корнями уравнения (или решениями).

Уравнение $ax + b = 0$ называется линейным, $x = -b/a$ – решение уравнения.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) называется квадратным уравнением. Для решения уравнения вычисляют $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение $x = -b/(2a)$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Теорема Виета: Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , то выполняется следующее соотношение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 x_2 = c/a. \end{cases}$$

При решении задач, связанных с теоремой Виета полезно использовать соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}; \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2; \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Примеры решения уравнений

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$.

Решение. О.Д.З. $x \neq 3$. $\frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x-3} = 27$,

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 9 = 27, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ x \neq 3. \end{cases} \quad x^2 + 3x - 18 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2}, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 3 \text{ не входит в О.Д.З.}$$

Ответ: $x = -6$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} = 4$.

Решение. Обозначим $z = \frac{x^2 + x - 5}{x}$, тогда получим уравнение

$$z + \frac{1}{z} = 4, \quad \begin{cases} z^2 - 4z + 3 = 0, \\ z \neq 0. \end{cases} \quad \text{Квадратное уравнение имеет корни } z_1 =$$

1, $z_2 = 3$ (оба корня входят в О.Д.З).

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + x - 5}{x} = 3.$$

Преобразуем их так $\begin{cases} x^2 + x - 5 = x, \\ x \neq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + x - 5 = 3x, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}, \quad \text{или} \quad x_3 = 1 + \sqrt{6}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{6}.$$

Все корни входят в область допустимых значений.

$$\text{Ответ: } \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.

Решение. Сгруппируем слагаемые $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47$.

Обозначим $y = x + \frac{1}{x}$, при этом заметим, что

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \quad \text{откуда } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Получим $4(y^2 - 2) + 12y = 47, \quad 4y^2 + 12y - 55 = 0$.

Это уравнение имеет корни $y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -\frac{11}{2}$.

$$1. \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1/2.$$

$$2. x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2}, \quad \begin{cases} 2x^2 + 11x + 2 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad x_1 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4},$$

$$x_2 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}.$$

Все корни входят в О.Д.З.

$$\text{Ответ: } 2, 1/2, \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}, \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}.$$

Решение уравнений методом разложения на множители

Один из способов решения уравнений $P_n(x) = 0$ состоит в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители $P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x)$. Нахождение корней многочлена является трудной задачей и общего универсального способа найти корни указать нельзя.

Пример 4. Решить уравнение: $3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 = 0$.

Решение. Подбираем один из корней уравнения, например $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ – корень. Следовательно, $3x^3 - 4x^2 + 5x - 18$ разделится без остатка на $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 & x - 2 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 & 3x^2 + 2x + 9 \\ \hline 2x^2 + 5x - 18 & \\ 2x^2 - 4x & \\ \hline 9x - 18 & \\ 9x - 18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$3x^2 + 2x + 9 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot 9 \cdot 3 < 0$ – корней нет.

Следовательно, уравнение имеет один корень.

Ответ: $x = 2$.

Уравнение $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = t$ при условии $a + b = c + d = l$ приводится к квадратному уравнению относительно неизвестной $y = x^2 + lx$.

Пример 5. Решить уравнение $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0,5625$.

Решение. $x(x+3)(x+2)(x+1) = 0,5625$, $0+3=1+2$.

Сделаем замену переменной $x^2 + 3x = y$, получим $y^2 + 2y - 0,5625 = 0$. Определяем корни уравнения: $y_1 = 0,25$; $y_2 = 2,25$.

1. $x^2 + 3x = 0,25$,

$4x^2 + 12x - 1 = 0$, $D = 144 + 16 = 160$,

$x_1 = \frac{-12 + 4\sqrt{10}}{8} = \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{10}}{2}$.

2. $x^2 + 3x + 2,25 = 0$, $D = 0$, $x_3 = -3/2$.

Уравнения, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ Модуль положительного числа есть само число,

модуль отрицательного числа есть число ему противоположное. Модуль нуля есть нуль.

Свойства модуля:

1. $|x| \geq 0$; 2. $|-a| = a$; 3. $|ab| = |a| \cdot |b|$;

4. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 5. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$;

6. $|x| < c$ ($c > 0$) $\Leftrightarrow -c < x < c$;

7. $|x| > c$ ($c > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < -c, \\ x > c. \end{cases}$ 8. $|a|^2 = a^2$.

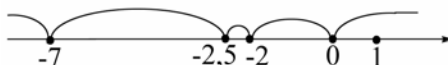
При решении уравнений, содержащих модуль, рассматривают несколько приемов решения. Рассмотрим один из них «метод интервалов».

Пример 6. Решить уравнение $|2x + 5| + 2|x| = |x + 2| + |x + 7|$. В ответе указать меньший корень.

Решение. Определим критические точки:

$2x + 5 = 0$, $x = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 7 = 0$,
 $x = -2,5$. $x = 0$. $x = -2$. $x = -7$.

Определим точки, в которых модуль обращается в нуль. Отметим эти значения x на числовой прямой и исследуем уравнение на



каждом из полученных интервалов.

Решим задачу на каждом промежутке.

1. $-\infty < x \leq -7$, $-2x - 5 - 2x = -x - 2 - x - 7$,
 $-2x = -4$, $x = 2$ (не входит в рассматриваемый промежуток).
2. $-7 < x \leq -2,5$, $-2x - 5 - 2x = -x - 2 + x + 7$,
 $-4x = 10$, $x = -2,5$ (входит в рассматриваемый промежуток).
3. $-2,5 < x \leq -2$, $2x + 5 - 2x = -x - 2 + x + 7$, $5 = 5$,
уравнение выполняется при всех x из рассматриваемого промежутка.
4. $-2 < x \leq 0$, $2x + 5 - 2x = x + 2 + x + 7$,
 $-2x = 4$, $x = -2$ (не входит в рассматриваемый промежуток).
5. $x > 0$, $2x + 5 + 2x = x + 2 + x + 7$,
 $2x = 4$, $x = 2$.

Итак, $[-2,5; -2] \cup \{2\}$.

Ответ: $-2,5$.

Пример 7. Решить уравнение $|x| + |x - 1| = 1$.

Решение. $x = 0$, $x = 1$.



1. $x \in (-\infty; 0)$, тогда $-x - x - 1 = 1$, $-2x = 0$, $x = 0$, $x \notin (-\infty; 0)$.
2. $x \in [0; 1)$, тогда $x - x + 1 = 1$, $1 = 1$, x любое из $[0; 1)$.
3. $x \in [1; +\infty)$, тогда $x + x - 1 = 1$, $2x = 2$, $x = 1$.

Ответ: $x \in [0; 1]$.

Пример 8. Решить уравнение $|x^2 - 14| = |x^2 - 4|$.

Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат, получим эквивалентное уравнение $(x^2 - 14)^2 = (x^2 - 4)^2$,

$$x^4 - 28x^2 + 196 = x^4 - 8x^2 + 16, \quad 20x^2 = 180,$$

$$x^2 = 9, \quad x = \pm 3.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Пример 9. Решить уравнение $|5x + 2| = 3 - 3x$.

Решение. Используя определение модуля, решим уравнение. Данное уравнение эквивалентно совокупности систем:

$$\begin{cases} 5x + 2 = 3 - 3x, \\ 3 - 3x \geq 0, \\ 5x + 2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -5x - 2 = 3 - 3x, \\ 3 - 3x \geq 0, \\ 5x + 2 < 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 1/8$, $x_2 = -5/2$.

Системы алгебраических уравнений

Рассмотрим некоторые методы решения систем уравнений.

1. Способ подстановки: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другое и подставляем в оставшиеся уравнения.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения $y = x + 1$ и подставим в первое:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 41, \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 41,$$

$$2x^2 + 2x - 40 = 0, \quad x^2 + x - 20 = 0, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 4.$$

При $x_1 = -5$, $y_1 = -5 + 1 = -4$.

При $x_2 = 4$, $y_2 = 4 + 1 = 5$.

Ответ: $(-5; -4); (4; 5)$.

2. Способ алгебраического сложения.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым уравнением.

$$y^3 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 125, \quad (x + y)^3 = 125, \quad x + y = 5.$$

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 20.$$

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases} \quad \text{Эту систему решаем методом подстановки.}$$

$$y = 5 - x, \quad x(5 - x) = 4, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$$

При $x_1 = 4$, $y_1 = 5 - 4 = 1$.

При $x_2 = 1$, $y_2 = 5 - 1 = 4$.

Ответ: $(4; 1); (1; 4)$.

3. Способ введения новых переменных. Суть этого метода рассмотрим на примере.

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + 2xy = 7, \\ xy + 2(x + y) = 8. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $x + y = a$, $xy = b$.

Получим систему уравнений
$$\begin{cases} a + 2b = 7, \\ b + 2a = 8. \end{cases}$$

Отсюда $a = 3$, $b = 2$.

Возвращаясь к переменным x и y получим
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

$y = 3 - x$, $(3 - x)x = 2$. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
 $y_1 = 3 - 2 = 1$, $y_2 = 3 - 1 = 2$.

Ответ: (1; 2); (2; 1).

2. решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{5}{x^2 - xy} + \frac{4}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2 - xy} - \frac{3}{y^2 - xy} = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\frac{1}{x^2 - xy} = t$; $\frac{1}{y^2 - xy} = z$.

Тогда получим
$$\begin{cases} 5t + 4z = -\frac{1}{6}, \\ 7t - 3z = \frac{6}{5}. \end{cases}$$
 Умножим первое уравнение на 3, а

второе на 4 почленно.

$$15t + 28z = -\frac{1}{2} + \frac{24}{5} \Rightarrow 43t = \frac{43}{10}, \quad t = 0,1.$$

Подставим t и определим $z = -1/6$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 - xy} = \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ y^2 - xy = -6. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы $(x - y)^2 = 4$, $|x - y| = 2$.

Получим 1. $\begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = 2. \end{cases} \quad 2x = 10, \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 3.$

2. $\begin{cases} x(x - y) = 10, \\ x - y = -2. \end{cases} \quad -2x = 10, \quad x_1 = -5, \quad y_1 = -3.$

Ответ: (5; 3); (-5; -3).

4. Система содержит однородное уравнение.

Рассмотрим пример $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Разделим первое уравнение на y^2 , $y \neq 0$.

Получим $\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 6 = 0$, $\frac{x}{y} = t$, $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

$$\frac{x}{y} = 2, \quad x = 2y, \quad \frac{x}{y} = 3, \quad x = 3y.$$

Подставим в $x^2 + y^2 = 10$, получим

1. $y^2 + 4y^2 = 10$, $y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 2y = \pm 2\sqrt{2}$.

2. $y^2 + 9y^2 = 10$, $y = \pm 1$, $x = 3y = \pm 3$.

Ответ: (3; 1); (-3; -1).
 $(2\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

5. Иногда при решении систем уравнений следует проявить смекалку (решение нестандартных уравнений).

Пример. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$

Решение. Перемножим почленно данные уравнения

$$\sqrt{\frac{20y}{x} \cdot \frac{16x}{5y}} = (\sqrt{x+y})^2 - (\sqrt{x-y})^2, \text{ т.е.}$$

$$8 = x + y - x + y, \quad 2y = 8, \quad y = 4.$$

Теперь сложим почленно: $\sqrt{\frac{20y}{x}} + \sqrt{\frac{16x}{5y}} = 2\sqrt{x+y}$ и подставим $y = 4$.

$$4. \quad \sqrt{\frac{20 \cdot 4}{x}} + \sqrt{\frac{16x}{20}} = 2\sqrt{x}.$$

Возведем в квадрат: $\frac{80}{x} + \frac{16x}{20} + 2 \cdot \frac{80}{x} \cdot \frac{16x}{20} = 4x,$

$$4x + 16x^2 + 144 = 4x, \quad 16x^2 = 144, \quad x = 12/4 = 3.$$

Ответ: $x = 3, y = 4.$

§ 3. Неравенства

Совокупность двух выражений, соединенных между собой знаком больше ($>$) или меньше ($<$) называется неравенством.

1. *Линейными неравенствами* называются неравенства вида:

$$ax + b > 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b \leq 0, \quad a \neq 0,$$

решениями которых будут:

$$\text{При } a > 0 \quad x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right), \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right), \quad x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right), \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right].$$

$$\text{При } a < 0 \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right), \quad x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right), \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]; \quad x \in \left[-\frac{b}{a}; \infty\right).$$

Пример 1. Решить неравенство $x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}.$

Решение. Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{12x - 6x - 6 - 3x + 4x - 8 + 9}{12} > 0,$$

$$\frac{7x - 5}{12} > 0, \quad 7x > 5, \quad x > 5/7, \quad x \in (5/7; +\infty).$$

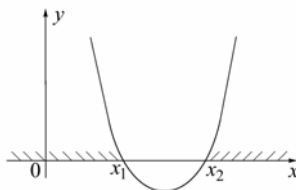
Ответ: $(5/7; +\infty).$

II. Квадратные неравенства ax^2

>0 (<0), $a \neq 0$.

При $a > 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

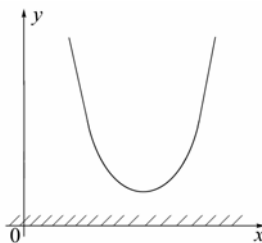
$+bx + c$



$$x \in \left(-\infty; \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \infty \right).$$

Если $a > 0$, $D < 0$,

то $x \in (-\infty; +\infty)$.



Но лучше решить неравенство методом интервалов:

1. Квадратный трехчлен разложим на множители $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (или < 0).
2. Корни многочлена наносят на числовую ось.
3. Строим «змейку», проходящую через корни.

Пример 2. Решить неравенство: $x^2 + x - 6 > 0$.

Решение. Разложим квадратный трехчлен на множители

$$(x + 3)(x - 2) > 0.$$

Отметим на числовой прямой и строим «змейку», проходящую через точки $x = -3$ и $x = 2$.



$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty).$$

Пример 3. Решить неравенство: $x^2 - 8x + 16 > 0$.

Решение. $(x - 4)^2 > 0$, оно верно при любом x , кроме $x = 4$.

Ответ: $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Рациональные неравенства вида $P_n(x) > 0$ ($P_n(x) < 0$), $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$

$\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно степеней n и m обычно решают методом интервалов.

Решение рациональных неравенств основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) и между этими точками не имеет других корней, то в промежутке (x_1, x_2) сохраняет знак. Поэтому для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ поступают так:

1. На числовой прямой отмечают все точки, в которых $f(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция непрерывна и не обращается в 0, т.е. сохраняет знак.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $f(x)$ на каждом из полученных промежутков.

Изменение знаков функции $f(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0$.

Решение. Нули многочлена, стоящего в знаменателе: $x = -1$, $x = -2$.

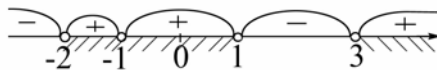
Нули многочлена, стоящего в числителе, легко находятся $x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$.

Неравенство запишем в виде:

$$\frac{(x - 3)(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} > 0.$$

Критические точки рациональной функции $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

Числовая ось разбивается этими точками на 5 интервалов.



$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty).$$

Иногда в неравенствах в числителе или знаменателе есть множитель $(x - a)^k$, где k – четное и $(x - a)^k > 0$, $x \neq a$. При этом условии обе части неравенства можно умножить или разделить на $(x - a)^k$, сохранив при этом знак неравенства.

Если в числителе или знаменателе есть множитель $(x - a)^k$, где k – нечетное, то при любых значениях a , это выражение имеет тот же знак, что и выражение $x - a$. Замена приводит к более простому неравенству, равносильному первоначальному.

Пример 4. Решить неравенство: $\frac{x^2(3x-4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^8} \leq 0$.

Решение. Заменяем $(3x - 4)^3$ на $3x - 4$ и $(x - 5)^5$ на $x - 5$, получим неравенство, равносильное первоначальному

$$\frac{x^2(3x-4)(x-2)^4}{(x-5)(2x-7)^8} \leq 0.$$

В неравенствах содержатся множители x^2 , $(x - 2)^4$, $(2x - 7)^8$ с четными показателями. При значении $x = 0$, $x = 2$, $x = 3,5$ эти множители обращаются в 0.

$x = 0$ и $x = 2$ – решения неравенства.

Разделив обе части неравенства на $\frac{x^2(x-2)^4}{(2x-7)^8}$, получим неравенство $\frac{3x-4}{x-5} \leq 0$.

$$x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right), x = 0, x \neq 3,5.$$



$$\text{Имеем: } \{0\} \cup \left[\frac{4}{3}; 3,5\right) \cup (3,5; 5).$$

III. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.

При решении неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, используется тот же прием, что и при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины.

При решении уравнений и неравенств с модулем используют:

1. Определение модуля: $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

2. Основные свойства модуля:

– Модуль вещественного числа, есть число неотрицательное: $|a| \geq 0$; $|a| = 0$ только для $a = 0$.

– Противоположные числа имеют равные модули $|a| = |-a|$.

– $|a| = \sqrt{a^2}$, где под квадратным корнем понимается арифметическое значение.

3. а) Неравенство $|x| < a$, где $a > 0$ равносильно $-a < x < a$.

б) Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$ равносильно совокупности двух

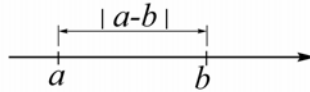
неравенств $\begin{cases} x > a, \\ x < -a. \end{cases}$

в) $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

г) Для модуля суммы и разности

$$|a + b| \leq |a| + |b|, |a - b| \geq |a| - |b|.$$

д) Модуль разности двух вещественных чисел a и b есть расстояние между точками a и b на числовой оси.



Замечание. Уравнения и неравенства с модулем решаются на множестве вещественных чисел.

Пример 5. Решить неравенство: $|x^2 - 2| + x < 0$.

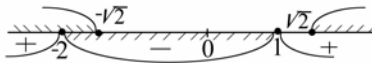
Решение. Используя определение модуля

$$1. \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad 2. \begin{cases} x^2 - 2 < 0, \\ -x^2 + x + 2 < 0. \end{cases}$$

Решим каждую из систем.

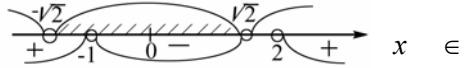
$$1. x \in [-2; -\sqrt{2}].$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$



$$2. \begin{cases} x^2 - 2 < 0, \\ -x^2 + x + 2 < 0. \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 > 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \\ \left[-\sqrt{2}; -1\right].$$



Объединяя найденные множества решений, получаем $(-2; -1)$.

Ответ: $x \in (-2; -1)$.

Решения более сложных неравенств основано на методе интервалов.

Пример 6. Решить неравенство: $|3 - x| + |2x - 4| - |x + 1| > 2x + 4$.

Решение. Определим критические точки:

$$\begin{array}{lll} 3 - x = 0, & 2x - 4 = 0, & x + 1 = 0, \\ x = 3, & x = 2, & x = -1. \end{array}$$

Отметим точки на числовой прямой



$$1. x \leq -1 \Rightarrow |x + 1| = -x - 1, \quad |3 - x| = 3 - x, \quad |2x - 4| = 4 - 2x.$$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x + 4 - 2x + x + 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1].$$

$$2. -1 < x \leq 2 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \quad |3 - x| = 3 - x, \quad |2x - 4| = 4 - 2x.$$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x + 4 - 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < 1/3 \Rightarrow x \in (-1; 1/3).$$

$$3. 2 < x \leq 3 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \quad |3 - x| = 3 - x, \quad |2x - 4| = 2x - 4$$

Неравенство принимает вид:

$$3 - x - 4 + 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x < -2 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$4. x \geq 3 \Rightarrow |x + 1| = x + 1, \quad |3 - x| = x - 3, \quad |2x - 4| = 2x - 4.$$

Неравенство принимает вид:

$$x - 3 - 4 + 2x - x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow 0 > 12 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1/3)$.

Пример 7. Решить неравенство: $\frac{|x - 4| - |x - 1|}{|x - 3| - |x - 2|} < \frac{|x - 3| + |x - 2|}{|x - 4|}$.

Решение.
$$\frac{(x-4)^2 - (x-1)^2}{(x-3)^2 - (x-2)^2} < \frac{(|x-3| + |x-2|)(|x-4| + |x-1|)}{|x-4|(|x-3| + |x-2|)}$$

(так как $|x-4| + |x-1| > 0$ и $|x-3| + |x-2| > 0$ при всех x)

$$\Leftrightarrow \frac{-3(2x-5)}{-(2x-5)} < \frac{|x-4| + |x+1|}{|x-4|} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x-4| < |x-4| + |x-1|, \\ x \neq \frac{5}{2}, \quad 4. \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-8)^2 < (x-1)^2, \\ x \neq 5/2, \quad 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-9)(x-7) < 0, \\ x \neq 5/2, \quad 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 7, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; 7)$.

§ Уравнения и неравенства с параметрами

Уравнения

Рассмотрим уравнение с параметрами a, b, \dots, c и неизвестными x, y, \dots, z :

$$F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что найдено множество его решений. Очевидно, что это множество представляет совокупность наборов вида:

$$\{a, b, \dots, c, x(a, b, \dots, c), y(a, b, \dots, c), \dots, z(a, b, \dots, c)\}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим равенство, справедливое для всех наборов $\{a, b, \dots, c\}$:

$$F(a, b, \dots, c, x(a, b, \dots, c), y(a, b, \dots, c), \dots, z(a, b, \dots, c)) \equiv 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) определяет набор неявных функций $x(a, b, \dots, c), y(a, b, \dots, c), \dots, z(a, b, \dots, c)$, которые мы и должны найти при решении уравнения с параметрами a, b, \dots, c и неизвестными функциями x, y, \dots, z .

Искомые функции x, y, \dots, z могут быть и многозначными.

Найти неявные функции $x(a, b, \dots, c), y(a, b, \dots, c), \dots, z(a, b, \dots, c)$ – это значит найти области их определения и их явное задание.

Неравенства

Рассмотрим неравенство с параметрами

$$F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z) > 0 \quad \text{и} \quad (4)$$

$$F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z) < 0. \quad (5)$$

Множество решений неравенства (4) обозначим D_+ , а неравенства (5) обозначим D_- . Пусть D – область определения, а D_0 – область решения уравнения (1), тогда, если некоторая точка области определения D не принадлежит области D_0 – области решения уравнения, то эта точка удовлетворяет либо неравенству (4), либо неравенству (5) и наоборот. Следовательно,

$$D \setminus D_0 = D_+ \cup D_- \quad (6)$$

Из (6) следует, что задача отыскания решений неравенств (4) или (5) сводится к задаче о знаке функции $F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z)$ в точках множества (6).

Как правило функция $F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z)$ непрерывная, поэтому решать неравенства (4) и (5) можно методом областей. Суть этого метода заключается в том, что нужно разбить множество $D \setminus D_0$ на связные области, которые будут областями знакопостоянства функции $F(a, b, \dots, c, x, y, \dots, z)$.

Решение уравнений с параметрами

Общий признак решения уравнения с параметрами заключается в том, что при решении уравнения с параметрами мы должны работать ни с одним уравнением, а с системой, содержащей само уравнение и тех неравенств, которые задают область определения этого уравнения.

Эта исходная система постепенно заменяется равносильными ей системами, которые становятся все проще и проще до тех пор, пока не получится система – ответ.

Переход от одной равносильной системы к другой совершается на основании свойств уравнений и неравенств, а также правил, из которых наиболее употребительно правило отсечения и правило подстановки.

Правило отсечения: пусть задана система уравнений и неравенств в области D . Если тем или иным способом мы отсекаем от области D определенную часть ее, в которой нет решений данной системы, то получим новую систему, равносильную исходной системе.

Правило подстановки: пусть удалось каким-либо образом выразить неизвестное через параметр: $x = f(a)$. Подставим вместо x во все остальные неравенства системы $f(a)$, тогда получим систему, из которой определяются условия, при которых возможно решение $x = f(a)$:

$$\begin{cases} F(a, x) = 0, \\ \Psi_1(a, x) \geq 0, \\ \Psi_2(a, x) \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_k(a, x) \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(a), \\ \Psi_1(a, f(a)) \geq 0, \\ \Psi_2(a, f(a)) \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_k(a, f(a)) \geq 0. \end{cases}$$

Пример 1. Для всех a найти решение уравнения: $\sqrt{a+x} = a - \sqrt{x}$.

Решение. Применим правило отсечения.

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = a - \sqrt{x}, \\ a \in R, \\ x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} = a - \sqrt{x}, & (1) \\ a+x \geq 0, & (2) \\ a - \sqrt{x} \geq 0, & (3) \\ x \geq 0. & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

Из соотношения (3) следует $a \geq \sqrt{x}$, а так как $\sqrt{x} \geq 0$, то $a \geq 0$. Таким образом, нам удалось отсечь $a < 0$, тогда (2) выполняется.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} = a - \sqrt{x}, \\ a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases}$$

Так как правая часть и левая положительны, то можем возвести в квадрат

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x = a^2 - 2a\sqrt{x} + x, \\ a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - a - 2a\sqrt{x} = 0x, \\ a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(a-1-2\sqrt{x}) = 0, \\ a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ x=0. \end{cases} ; \begin{cases} 2\sqrt{x} = a-1, \\ a \geq 0, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

левая часть первого соотношения неотрицательна, поэтому отсекаем $0 < a < 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ x=0. \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{(a-1)^2}{4}, \\ a \geq 1, \\ x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{x}. \end{cases}$$

Ответ: при $a = 0$ $x = 0$,
при $a < 0$ и $0 < a < 1$ – решений нет,

$$\text{при } a \geq 1 \quad x = \frac{(a-1)^2}{4}.$$

При решении этого примера мы дважды отсекали из области $D(-\infty < a < +\infty)$ части, где нет решений: первый раз интервал $(-\infty; 0)$, а второй раз интервал $(0; 1)$ для параметра a .

Пример 2. Для всех значений параметра a решить уравнение:

$$\sqrt{3x+7} = \sqrt{2x+5a}.$$

Решение. Применим правило подстановки.

$$\begin{cases} \sqrt{3x+7} = \sqrt{2x+5a}, \\ 3x+7 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+7 = 2x+5a, \\ 3x+7 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 3x+7 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 3(5a-7)+7 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ 15a-14 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a-7, \\ a \geq 14/15. \end{cases}$$

Ответ: при $a < 14/15$ – решений нет,
при $a \geq 14/15$ $x = 5a - 7$.

Пример 3. Решить неравенство: $|2x+a| + |x-2a| < 20$.

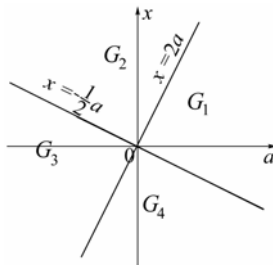
Решение. Согласно изложенной теории нужно сначала рассмотреть уравнение. Решение неравенства иллюстрируем графически. Для этого рассмотрим плоскость (a, x) . Найдем области этой плоскости, где подмодульные выражения равны нулю:

$$2x+a=0 \quad \text{и} \quad x-2a=0.$$

Совершенно очевидно, что это две прямые $x = -a/2$ и $x = 2a$.

Построим эти прямые.

Эти две прямые разбивают всю плоскость (a, x) на 4 части. Обозначим их



G_1, G_2, G_3 и G_4 . Найдем знаки подмодульных выражений в этих областях, для этого построим таблицу.

Области	G_1	G_2	G_3	G_4
$2x - a$	+	+	-	-
$x - 2a$	-	+	+	-

Из анализа этой таблицы следует, что придется решать 4 уравнения для 4-х областей.

Для области G_1 : $2x + a - x + 2a = 20, \quad x = -3a + 20.$

Для области G_2 : $2x + a + x - 2a = 20, \quad x = (1/3)a + 20/3.$

Для области G_3 : $-2x - a + x - 2a = 20, \quad x = -3a - 20.$

Для области G_4 : $-2x - a - x + 2a = 20, \quad x = (1/3)a - 20/3.$

Построим в этих 4-х областях соответствующие прямые:

В области G_1 прямую $x = -3a + 20.$

В области G_2 прямую $x = (1/3)a + 20/3.$

В области G_3 прямую $x = -3a - 20.$

В области G_4 прямую $x = (1/3)a - 20/3.$

Для этого найдем точки пересечения граничных прямых областей с прямыми в этих областях.

Обозначим точку пересечения прямой $x = 2a$ с прямой $x = -3a + 20$ A_1 , точку пересечения прямой $x = 2a$ с прямой $x = (1/3)a + 20/3$ A_2 .

$$\begin{cases} x = 2a, \\ x = -3a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 2a = -3a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 5a = 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ a = 4. \end{cases} \quad A_1(4; 8).$$

$$\begin{cases} x = 2a, \\ x = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 2a = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ 6a = a + 20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ a = 4. \end{cases} \quad A_2(4; 8).$$

Как видим эти точки совпали, обозначим эту точку $A(4; 8).$

$$B_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = \frac{1}{3}a + \frac{20}{3}. \end{cases} \quad B_1(-8; 4). \quad B_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = -3a - 20. \end{cases} \quad B_2(-8; 4).$$

$$B_1 = B_2 = B(-8; 4).$$

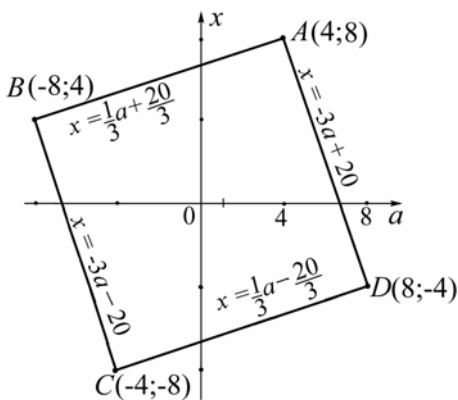
$$C_1: \begin{cases} x = 2a, \\ x = -3a - 20. \end{cases} \quad C_1(-4; -8). \quad C_2: \begin{cases} x = 2a, \\ x = \frac{1}{3}a - \frac{20}{3}. \end{cases} \quad C_2(-4; -8).$$

$$C_1 = C_2 = C(-4; -8).$$

$$D_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = \frac{1}{3}a - \frac{20}{3}. \end{cases} \quad D_1(8; -4). \quad D_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a, \\ x = -3a + 20. \end{cases} \quad D_2(8; -4).$$

$$D_1 = D_2 = D(8; -4).$$

Построим прямые, на которых выполняется равенство $|2x + a| + |x - 2a| = 20$.



Эти четыре прямые разбили всю плоскость (a, x) на две связные области: на «внутреннюю» часть квадрата и «внешнюю» часть квадрата.

Согласно изложенной теории нужно теперь расставить знаки функции $F = |2x + a| + |x - 2a| - 20$ в двух полученных областях и затем записать ответ. Для этого возьмем точку внутри квадрата $(0; 0)$

$$F(0; 0) = |0 + 0| + |0 - 0| - 20 < 0.$$

Таким образом, для всех внутренних точек квадрата выполняется решаемое неравенство.

Ответ: при $-\infty < a < -8$ – решений нет;
 при $-\infty < a < -4$ – $-3a - 20 < x < (1/3)a + (20/3)$;
 при $-4 < a < 4$ – $(1/3)a - (20/3) < x < (1/3)a + (20/3)$;
 при $4 < a < 8$ – $(1/3)a - (20/3) < x < -3a + 20$;
 при $a > 8$ – решений нет.

Пример 4. Для всех допустимых значений параметра a решить уравнение $\sqrt{4 + ax} = x + 2$.

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$D: \begin{cases} 4 + ax \geq 0, \\ a \in R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x \in R, \end{cases} \begin{cases} a > 0, \\ x \geq -4/a, \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ x \leq -4/a. \end{cases}$$

Решаем уравнение.

$$\begin{cases} \sqrt{4 + ax} = x + 2, \\ D. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + ax} = x + 2, \\ D, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + ax = (x + 2)^2, \\ D, \\ x \geq -2, \\ 4 + ax \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + ax = x^2 + 4x + 4, \\ D, \\ x \geq -2, \\ 4 + ax \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - a + 4) = 0, \\ a \in R, \\ x \geq -2, \\ 4 + ax \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = a - 4, \\ a \in R, \\ x \geq -2, ax + 4 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ 0 \geq -2, \\ 4 \geq 0. \end{cases}, \begin{cases} x = a - 4, \\ a - 4 \geq -2, \\ a(a - 4) + 4 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = a - 4, \\ a \in R, \end{cases}, \begin{cases} x = a - 4, \\ a \geq 2, \\ a^2 - 4a + 4 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

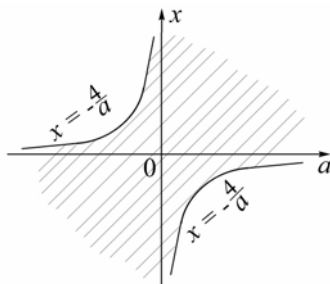
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ a \in R. \end{cases}, \begin{cases} x = a - 4, \\ a \geq 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R, \\ x = 0. \end{cases}, \begin{cases} a \geq 2, \\ x = a - 4. \end{cases}$$

Ответ: при любом a , $x = 0$ и
при $a \geq 2$, $x = a - 4$ и $x = 0$.

Перейдем теперь к решению неравенств. Для этого из области определения нужно убрать множество решений уравнения.

Построим область определения уравнения:

$$D: \begin{cases} a = 0, \\ x \in R, \end{cases} \begin{cases} a > 0, \\ x \geq -4/a, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x \leq -4/a. \end{cases}$$



Область определения уравнения представляет заштрихованную часть.

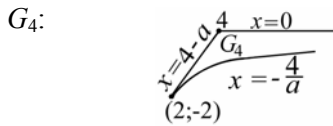
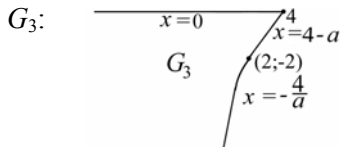
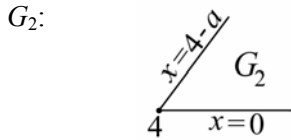
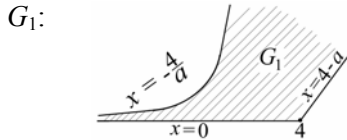
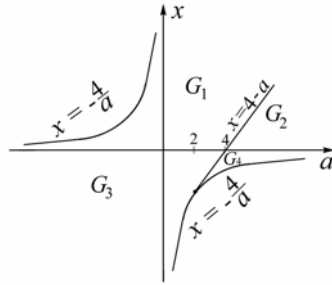
ную

Для решения неравенств $\sqrt{4 + ax} > x + 2$ и $\sqrt{4 + ax} < x + 2$ согласно теории нужно убрать множество D_0 из D .

$$D_0: \begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x = 0, \end{cases} \begin{cases} a \geq 2, \\ x = a - 4, \end{cases} \text{ т.е. убрать две}$$

прямые: ось a и при $a \geq 2$ прямую $x = a - 4$.

Вся область определения при этом разбилась на 4 области:



Области G_1, G_2, G_3, G_4 задаются следующими системами и совокупностями неравенств:

$$G_1: \begin{cases} a < 0, \\ 0 < x < -(4/a), \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a < 4, \\ x > 0, \end{cases} \begin{cases} a > 4, \\ x > a - 4. \end{cases};$$

$$G_2: \begin{cases} a > 0, \\ 0 < x < a - 4. \end{cases};$$

$$G_3: \begin{cases} a \leq 0, \\ x < 0, \end{cases} \begin{cases} 0 < a \leq 2, \\ -(4/a) < x < 0, \end{cases} \begin{cases} 2 < a < 4, \\ a - 4 < x < 0. \end{cases};$$

$$G_4: \begin{cases} 2 < a \leq 4, \\ -(4/a) < x < a - 4, \end{cases} \begin{cases} a > 4, \\ -(4/a) < x < 0, \end{cases};$$

Неравенство $\sqrt{4+ax} > 2+x$ справедливо на G_2 и G_3 , а неравенство $\sqrt{4+ax} < 2+x$ справедливо на областях G_1 и G_4 . Это легко проверить, подставив координаты любой точки из областей G_1, G_2, G_3, G_4 в функцию $F(a, x) = \sqrt{4+ax} - x - 2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: $\log_2(13x + 8) = \log_2(5x + 2a)$.

Ответ: при $a > \frac{20}{13}$, $x = \frac{a-4}{4}$, при $a \leq \frac{20}{13}$ решений нет.

2. При каких a уравнение $\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$ имеет единственное решение?
Ответ: $a = \pm 2$, $a = -(10/3)$.

3. Решить уравнение: $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$.

Ответ: при $a \neq 0$, $x = 1$,
при $a = 0$, $x = \pm 1$.

4. Решить уравнение: $(x - 1)\sqrt{x - a} = 0$.

Ответ: если $a < 1$, то $x = a$ или $x = 1$;
если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x = a$.

5. Решить неравенство: $(a - 1)\sqrt{x} \leq 0$.

Ответ: при $a \leq 1$, $x \geq 0$,
при $a > 1$, $x = 0$.

6. Решить уравнение: $|x + 2a| + |2a - x| = 4$.

Ответ: при $-\infty < a < -1$, решений нет,
при $a = -1$, $-2 \leq x \leq 2$,
при $-1 < a < 1$, $x = \pm 2$,
при $a = 1$, $-2 \leq x \leq 2$,
при $a > 1$, решений нет.

7. Решить неравенство: $|x + 2a| + |2a - x| < 4$.

Ответ: при $-2 < a < 2$, $-1 < x < 2$,
при остальных a решений нет.

8. Решить уравнение: $\frac{x - a}{x - 1} = 0$.

Ответ: при $a \neq 1$, $x = a$, при $a = 1$ решений нет.

9. При каких a уравнение $ax^2 - 4x + 3 + a$ имеет два корня?

Ответ: $-4 < a < 0$ и $0 < a < 1$.

10. Решить неравенство: $(x - a)(x - 2)(x - 3) > 0$.

Ответ: при $a < 2$, $a < x < 2$ и $x > 3$,
при $a = 2$, $x > 3$,
при $2 < a < 3$, $2 < x < a$ и $x > 3$,
при $a = 3$, $2 < x < 3$ и $x > 3$,
при $a > 3$, $2 < x < 3$ и $x > a$.

Тест (решение неравенств)

1. Решить неравенство: $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

1. $(-\infty; -7) \cup (-4; -2)$; 2. $(-\infty; -7] \cup [-4; -2]$;
3. $(-7; -4) \cup (-2; +\infty)$; 4. Правильный ответ не указан.

2. Решить неравенство: $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$.

1. $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$; 2. $[-2; -1]$;
3. $(-\infty; -4) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; 4. Правильный ответ не указан.

3. Решить неравенство: $(x^2 - 2x)(2x - 2) - 9 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \leq 0$.

1. $(-\infty; -1] \cup [0; 1] \cup [2; 3]$; 2. $(-\infty; -1) \cup (0; 1] \cup [2; 3]$;
3. $(-1; 0) \cup (1; 2)$; 4. Правильный ответ не указан.

4. Укажите число целых решений неравенства: $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 5x} \leq \frac{1}{x + 5}$.

1. 5; 2. 3. 4. Правильный ответ не указан.

5. Решить неравенство: $\frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$.

1. 2. 3. 4. Правильный ответ не указан.

6. Укажите число целых решений $\frac{x^2 - 16x + 64}{(x-8)(x-10)} \geq -1$, принадлежащих отрезку $[7; 12]$.

1. 4; 2. 0; 3. 3; 4. Правильный ответ не указан.

7. Решить неравенство $|x-1| < 2x-5$. В ответе указать наименьшее число.

1. 5; 2. 6; 3. 0; 4. Правильный ответ не указан.