§1. Прогрессии

Последовательность – функция натурального аргумента.

1. Задание последовательности формулой общего члена: $a_n = f(n)$, $n \in N$,

например, $a_n = n^2 + n + 41$, $a_1 = 43$, $a_2 = 47$, $a_3 = 53$, …

2. Задание последовательности рекуррентным соотношением: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$.

3. Числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … ($a_1 = a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Формула общего члена: $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Свойства: $$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} = a_{2n+2},$$
$$A_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n-1} - 1.$$

В истории математики вначале появился термин «прогрессия», означающий в переводе с латинского «движение вперед». Под этим термином прежде понимали всякую последовательность чисел, построенному по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. Например, 1, 4, 9, … , n^2. Но затем с появлением и расширением понятия «функция» стало принято считать числовую последовательность – частным случаем функции.

Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом называется ***арифметической прогрессией.***

Иначе говоря, последовательность – арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие: $a_{n+1} = a_n + d$, где d – некоторое число.

Обозначение $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$;

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n$ – разность прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Основные свойства:

1. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-3} = \ldots$, т.е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

2. $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$, $n \in N$.

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и тоже число.

Обозначение $\div\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n$.

а) Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, q – знаменатель прогрессии.

б) Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид:

$$S_n = \frac{b_1 q - b_1}{1-q} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \; q \neq 1.$$

в) Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Свойства прогрессии:

1. $b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$, $n \in N$.
2. $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-3} = \ldots$, т.е. произведение членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

Пример 1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

Решение. $a_3 + a_9 = 8$. Выразим a_3 и a_9 через a_1 и d (по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$).

$$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 8; \qquad 2a_1 + 10d = 8.$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 11 = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{8 \cdot 11}{2} = 44.$$

Ответ: 44.

Пример 2. Вычислить 7,5 + 9,8 + 12,1 + … + 53,5.

Решение. Для этой последовательности чисел выполняется признак арифметической прогрессии $9{,}8 = \dfrac{7{,}5 + 12{,}1}{2}$, то данная последовательность чисел – арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 7{,}5$; $d = 9{,}8 - 7{,}5 = 2{,}3$; $a_n = a_1 + d(n-1)$,

$$53{,}5 = 7{,}5 + 2{,}3(n-1), \quad 46 = 2{,}3(n-1), \quad n = 21.$$

Отсюда $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{7{,}5 + 53{,}5}{2} \cdot 21 = 640{,}5.$

Ответ: 640,5.

Пример 3. Знаменатель геометрической прогрессии равен –2, сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

Решение. $S_5 = 5{,}5$; $q = -2$; $S_5 = \dfrac{b_1(1-(-2)^5)}{1-(-2)}$; $5{,}5 = \dfrac{b_1 \cdot 33}{33}$;

$$b_1 = 0{,}5; \;\; b_5 = b_1 \cdot q^4 = 0{,}5 \cdot (-2)^4 = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 4. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 7, а произведение этих членов равно 8.

Решение. Пусть a – первый член, q – знаменатель геометрической прогрессии.

По условию $\begin{cases} a(1+q+q^2) = 7, \\ a^3q^3 = 8. \end{cases}$ Из второго уравнения системы находим $aq = 2$, тогда, подставляя $a = 2/q$ в первое уравнение системы, получаем $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Отсюда $q_1 = 1/2$ и $q_2 = 2$.

Последовательность бесконечно убывающая $\Rightarrow |q| < 1$, следовательно, $q = 1/2$ и тогда $a = 4$.

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{4}{1-1/2} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 5. Обратить периодическую дробь 0,58(3) в обыкновенную.

Решение. Запишем данную дробь в виде:

$$0{,}58333333333\ldots = 0{,}58 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \ldots =$$

$$= \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{1-0{,}01} = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{7}{12}.$$

Пример 6. Пусть x_1 и x_2 положительные корни уравнения $4x - 10x^2 = A$ и x_3 и x_4 – положительные корни уравнения $36x - 10x_2 = B$. Определить числа A и B так, чтобы числа x_1, x_2, x_3, x_4 образовали геометрическую прогрессию.

Решение. По теореме Виета:

$10x^2 - 4x + A = 0$,

$$x^2 - (2/5)x + A/10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2/5, \\ x_1 \cdot x_2 = A/10. \end{cases}$$

Аналогично, $10x^2 - 36x + B = 0$,

$$x^2 - (36/10)x + B/10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 36/10, \\ x_3 \cdot x_4 = B/10. \end{cases}$$

$$x_1 = b_1;\ x_2 = b_1q;\ x_3 = b_1q^2;\ x_4 = b_1q^3.$$

Получаем $\begin{cases} b_1 + b_1q = \dfrac{2}{5}, \\ b_1q^2 + b_1q^3 = \dfrac{36}{10}. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} b_1(1+q) = \dfrac{2}{5}, \\ b_1q^2(1+q) = \dfrac{36}{10}. \end{cases}$

$$\frac{b_1(1+q)}{b_1q^2(1+q)} = \frac{2\cdot 10^2}{5\cdot 36}; \qquad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{9},\ \ q_1 = 3,\ \ q_2 = -3 \text{ (не удовл.)}.$$

$$b_1(1+q) = 2/5,\ \ b_1(1+3) = 2/5,\ \ b_1 = \frac{2}{5\cdot 4} = \frac{1}{10};$$

$$A = 10x_1\cdot x_2 = 10b_1\cdot b_1q = 10\,b_1^2\cdot q = 10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot 3 = \frac{3}{10},$$

$$B = 10x_3\cdot x_4 = 10b_1q^2\cdot b_1q^3 = 10\cdot\frac{1}{100}\cdot 3^5 = \frac{243}{10}.$$

Ответ: 0,3, 24,3.

Примеры для самостоятельного решения

1. найти пятый член арифметической прогрессии: 19, 15, …

Ответ: 3.

2. Найти пятый член геометрической прогрессии: –1, 3, ….

Ответ: – 81.

3. сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найти сумму шести первых членов.

Ответ: 87 или 69.

4. Шестой член арифметической прогрессии составляет 60 % от третьего члена той же прогрессии, а произведение их равно 15. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась $30\frac{1}{3}$. *Ответ*: 7 или 13.

5. В арифметической прогрессии десятый член равен 13, пятый член равен 18. Найти разность прогрессии. *Ответ*: – 1.

6. Знаменатель геометрической прогрессии равен (–2), сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

Ответ: 8.

7. Вычислить 432 + 72 + 12 + 2 … *Ответ*: 518,4.

8. Какой вид имеют все натуральные числа, дающие при делении на 7 и в остатке 5. *Ответ*: $a_n = 7(n - 1) + 5 = 7n - 2$, $n \in N$.

9. В геометрической прогрессии сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого равна 80. Вычислите частное от деления первого члена прогрессии на ее знаменатель.

Ответ: 4.

10. В арифметической прогрессии третий член равен –6, сумма второго и пятого членов равна –9, а n-ый член равен 15. Найти n.

Ответ: 10.

11. Три числа, сумма которых 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму 1, а от третьего отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

12. Сумма первых трех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами равна 10,5, а сумма прогрессии 12. Найти эту прогрессию.

13. Представьте бесконечную десятичную дробь в виде обыкновенной дроби: а) 2,01(06); б) 0,28(36).

14. Вычислить: $3\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+...\right)$.

15. Найти сумму $1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \ldots + 100\cdot 2^{99}$.

Ответ: $99\cdot 2^{100} + 1$.

16. В арифметической прогрессии сумма ее n членов равна $n^2 + 5n$ при любом натуральном n. Определить десятый член прогрессии.

Ответ: 24.

17. найти сумму всех двузначных положительных чисел.

Ответ: 4905.

18. Вычислить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 1,4(9); 0,(6); 0,(296) …. *Ответ*: 2,7.

Контрольный тест № 1

1. сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

1) $S_n = \frac{a_1}{1-q}$; *2*) $S_1 = \frac{a_1 + a_n}{3}\cdot n$; *3*) $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$;

4) правильный ответ не указан.

2. Вычислить $32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + ...$

1) 80; *2*) 20; *3*) 40; *4*) 12,5;

5) правильный ответ не указан.

3. Вычислить $24\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{25}+\frac{2}{125}+\frac{3}{625}...\right)$

1) 26; *2*) 13; *3*) 10; *4*) 0;

5) правильный ответ не указан.

4. Найти сумму членов последовательности 6; 1; $\frac{1}{6}$; …

1) 36/5; *2*) 36/7; *3*) 6; *4*) 0;

5) правильный ответ не указан.

5. В арифметической прогрессии $a_1 = -5{,}6$ и $a_2 = -4{,}8$. На каком месте (укажите номер) находится число 16.
1) $n = 14$; *2*) $n = 13$; *3*) $n = 27$; *4*) $n = 28$;
5) правильный ответ не указан.

6. В геометрической прогрессии $a_1 = 36\sqrt{3}$ и $a_3 = 9\sqrt{3}$. Найти q.

1) 2; *2*) 1/4; *3*) 1/2 или –1/2; *4*) 1/2; *5*) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

7. Сколько имеется двузначных натуральных чисел кратных 6?
1) 15; *2*) 13; *3*) 14; *4*) 17; *5*) 20.

8. В геометрической прогрессии знаменатель равен –2, а сумма первых семи членов равна 21,5. Вычислите частное от деления знаменателя прогрессии на ее первый член.
1) –5; *2*)–4; *3*) 3; *4*) 7;
5) правильный ответ не указан.

9. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 21. Если первое число оставить без изменения, из второго вычесть один, а к третьему прибавить 1, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию. Найти числа, образующие арифметическую прогрессию.
1) 12, 7, 2; *2*) 3, 7, 11; *3*) 17, 7, –3; *4*) 12, 7, 2 и 3, 7, 11;
5) правильный ответ не указан.