Томский политехнический университет

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

Пособие для абитуриентов

Томск 2004

1. Прямые и плоскости в пространстве

1.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве:

а) лежат в одной плоскости, при этом иметь общую точку, т.е. пересекаться, или не иметь общей точки, тогда их называют *параллельными*;

б) не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют *скрещивающимися*.

Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен углу, образованному двумя лучами, выходящими из одной точки и параллельны этим скрещивающимся прямым.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной их общего перпендикуляра между точками, расположенными на этих прямых. Это расстояние есть наименьшее.

1.2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*, если прямая перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей плоскости.

Теорема 1. (признак перпендикулярности прямой и плоскости) Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Прямую, пересекающую плоскость, но не перпендикулярную ей, называют *наклонной* к плоскости.

Угол между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

BC – наклонная; AC – ее проекция; $\angle\ BCA$ – угол между прямой ВС и плоскостью α; AB – длина перпендикуляра от точки B до плоскости α.

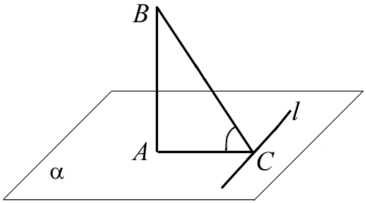


Рис. 1

Теорема 2. (о трех перпендикулярах) Прямая l, лежащая в некоторой плоскости α, перпендикулярна наклонной, если она перпендикулярна ее ортогональной проекции (рис. 1).

Теорема 3. (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама прямая параллельна этой плоскости.

1.3. Взаимное расположение плоскостей

Признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β, исходящими из одной прямой AB.

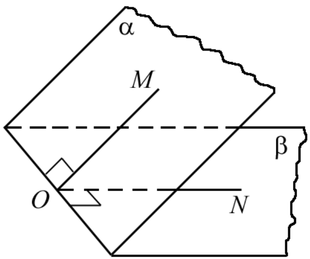


Рис. 2

Прямая AB называется *ребром*, а полуплоскости – *гранями* двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восстановленными к ребру из произвольной его точки, т.е. $\angle MON$.

Двугранный угол измеряется его линейным углом.

2. Многогранники

Многогранник – тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

Призма. Многогранник, две грани которого равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а ребра всех остальных граней параллельны, называется n-угольной призмой.

Два равных n-угольника называют *основаниями призмы*; остальные грани – *боковыми гранями призмы*. Все боковые ребра призмы равны.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям основания, называется *прямой призмой*.

Правильная призма – прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

Площадь боковой поверхности призмы $S_{бок} = P_п \cdot AA_1$, где $P_п$ – периметр перпендикулярного сечения призмы; AA_1 – длина бокового ребра.

Объем наклонной призмы $V = S_п \cdot AA_1$, где $S_п$ – площадь перпендикулярного сечения призмы; AA_1 – длина бокового ребра; или $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота призмы.

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы.

Свойства параллелепипеда:

1. Середина диагонали является его центром симметрии;
2. Противолежащие грани попарно равны и параллельны;
3. Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Прямым называют параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания. В противном случае параллелепипед называют *наклонным*.

Прямоугольный параллелепипед – это прямой параллелепипед, у которого основания – прямоугольники.

Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a, b, c – длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Все грани куба – квадраты. Объем куба $V = a^3$.

<u>Пирамида.</u> *Пирамидой* называется многогранник, одна грань которого (называемая основанием) – многоугольник, а остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной (вершина пирамиды). По числу вершин (сторон) основания различают треугольные, четырехугольные и т.д. пирамиды.

Тетраэдр – треугольная пирамида, у которой все грани – правильные треугольники (одно из пяти тел Платона).

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника.

Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани.

В правильную пирамиду можно вписать сферу и вокруг нее можно описать сферу.

В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу и вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу; в каждом из этих случаев сфера будет единственной.

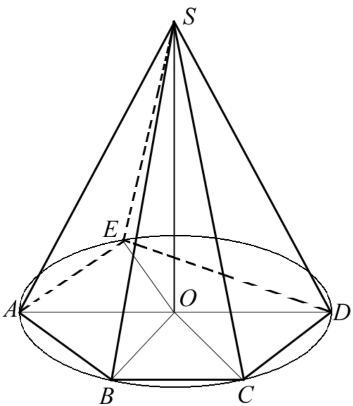


Рис. 3

Теорема. Пусть дана произвольная пирамида (рис. 3). Тогда равносильны следующие три условия:

1. все боковые ребра пирамиды равны друг другу;
2. все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом;
3. существует окружность, описанная около основания, центр которой совпадает с ортогональной проекцией вершины пирамиды на основание.

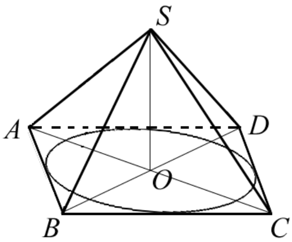


Рис. 4

Теорема. Пусть дана произвольная пирамида с вершиной в точке S; SO – ее высота, причем точка O лежит внутри основания (рис. 4). Тогда равносильны следующие три условия:

1. все высоты боковых граней пирамиды, опущенные из вершины, равны друг другу;
2. все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом;
3. существует окружность, вписанная в основание, центр которой совпадает с точкой O.

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; H – высота пирамиды.

Подобие многогранников. Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются сходственными. У подобных многогранников:

1. двугранные углы равны и одинаково расположены;
2. сходственные ребра пропорциональны.

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1. Если в пирамиде проведем секущую плоскость, параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной;
2. Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных линейных элементов многогранников;
3. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов многогранников;
4. Квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.

2.1 Построение плоских сечений многогранников

Построить сечение многогранника плоскостью – это значит построить прямые, являющиеся следом пересечения граней многогранника данной плоскостью. Секущая плоскость может быть задана различными способами, например,

1. тремя точками не лежащими на одной прямой;
2. прямой и точкой, не лежащей на ней;
3. двумя пересекающимися прямыми;
4. некоторыми из указанных выше геометрических элементов совокупности с различными зависимостями между ними и элементами.

Для построения сечений многогранников плоскостью применяют два способа построения следов и соответствия.

Способ построения следов состоит в том, что плоскости нижнего основания многогранника (иногда на другой плоскости) выполняется построение следов (линий пересечения секущей с плоскостью). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.

Построение сечений основано на простом следствии из аксиом стереометрии: если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является линией пересечения этих плоскостей.

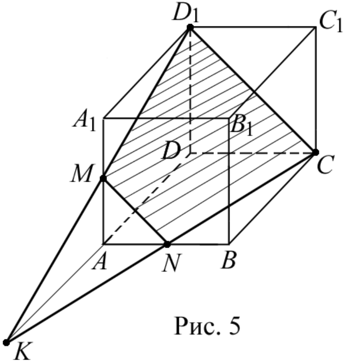


Рис. 5

Задача 1. Построить сечение куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1 (рис. 5).

Так как точки D_1 и C принадлежат грани DD_1CC_1 и плоскости, которую мы проводим, то соединяющая их линия есть линия пересечения грани и плоскости, т.е. след.

Для построения других следов продлим линию NC до пересечения с продолжением ребра AD в точке K.

Тогда точка K принадлежит плоскости грани AA_1DD_1 и плоскости, которую мы проводим. Значит линия KD_1 – след, который должен пересечь ребро AA_1 в точке M.

Тогда $MNCD_1$ – искомое сечение.

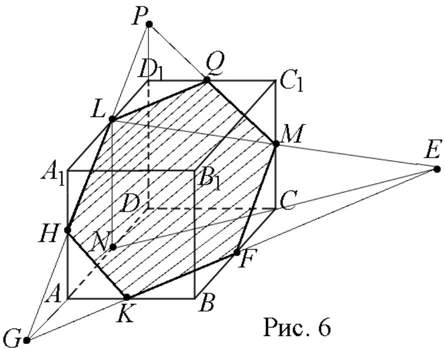


Рис. 6

Задача 2. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки K, L, M, лежащие на пересекающихся ребрах (рис. 6).

1. Опустим перпендикуляр LN из точки L на прямую AD.

2. Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E. Обе эти прямые лежат в одной плоскости, определяемой тремя точками L, M, N и не параллельны, следовательно обязательно пересекутся в точке E.

3. Так как $NC \subset ABCD$; LM принадлежит плоскости, которую проводим, значит E принадлежит этой же плоскости.

4. Проведем прямую EK до пересечения с продолжением AD в точке G.

5. Проведем прямую GL до пересечения с продолжением ребра DD_1 в точке P. Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получим точку Q. Точки L, Q, M, F, K, H последовательно соединим. Фигура $LQMFKH$ – искомое сечение.

Задача 3. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна 1/3. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1/4. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α, которая пересекает прямые, лежащие на ребрах A_1B_1 и A_1D_1 соответственно в точках N и Q. Найти объем пирамиды $NEQA_1$.

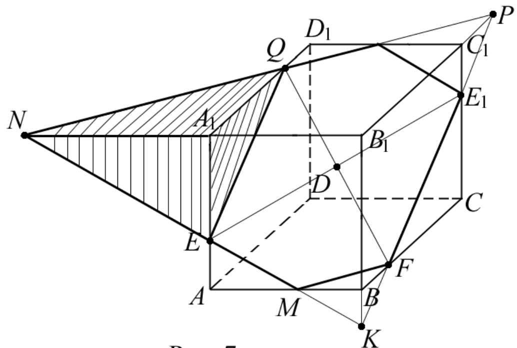


Рис. 7

23:16

Решение.

1. Построим сечение.

2. $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H;$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1E \cdot A_1O \cdot A_1N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} A_1N = \frac{1}{12} A_1N.$$

3. $\Delta KBF \sim \Delta E_1CF;\quad \frac{BF}{BK} = \frac{CF}{E_1C}.$ Отсюда $BK = \frac{BF \cdot E_1C}{CF};$

$$BK = \frac{(1/4)\cdot(2/3)}{(3/4)} = \frac{2\cdot 4}{12\cdot 3} = \frac{2}{9}; \qquad B_1K = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}.$$

4. $\Delta NA_1E \sim \Delta NB_1K;\qquad \frac{NA_1}{NB_1} = \frac{A_1E}{B_1K}.$

Пусть

$$NA_1 = x, \text{ то } \frac{x}{1+x} = \frac{2/3}{11/9};\quad \frac{11}{9}x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x;\quad \frac{(11-6)}{9}x = \frac{6}{9};$$

$$5x = 6,\quad x = 6/5.$$

5. $A_1N = 2/5$; $V = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{10}$.

Ответ: 1/10.

Задача 4. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M, причем $K \in BB_1C_1C$; $L \in CC_1D_1D$; $M \in AA_1B_1B$ (рис. 8).

1. Построим точки встречи прямых MK и KL с плоскостью основания призмы. Для этого спроецируем M и L на основание в точки M_1 и L_1 соответственно.

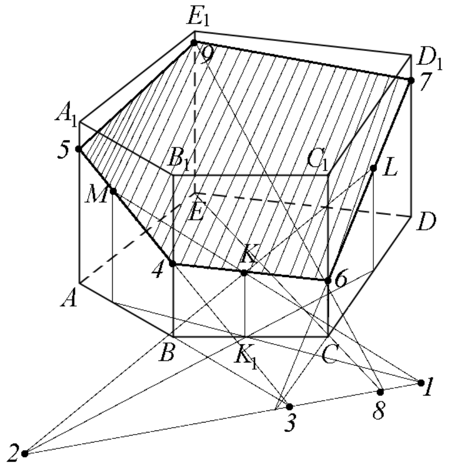


Рис. 8

Тогда пересечение M_1K и MK дает точку *1* – точку встречи прямой MK с плоскостью основания, а пересечение прямых KL и L_1K дают точку *2* – точку встречи прямой KL с плоскостью основания. Точки *1* и *2* определяют след плоскости (линию пересечения плоскости MLK с плоскостью основания). Продолжим прямую AB до пересечения с прямой *1*, *2* в точке *3*. Через *3* и M проведем прямую в грани AA_1B_1B. Прямая пересечет боковые ребра AA_1 и BB_1 и тем самым определит вершины сечения *4* и *5*. Затем определяем вершины *6* и *7*, продолжив до пересечения со следом сторону CD.

Вершину ребра EE_1. Продлим диагональ EC до пересечения со следом в точке *8*. Соединим *8* и *6* продолжая до пересечения с ребром EE_1 в точке *9*.

Соединим точки *5* и *9*, *9* и *7*. Получим сечение.

Одним из ***недостатков*** является тот факт, что при малом наклоне плоскости сечения плоскости основания след оказывается весьма удаленным от основной части чертежа.

Задача 5. Длина ребра куба равна a. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1.

Решение. Пусть секущая плоскость α. Отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости α и грани куба, поэтому являются сторонами сечения (рис. 9).

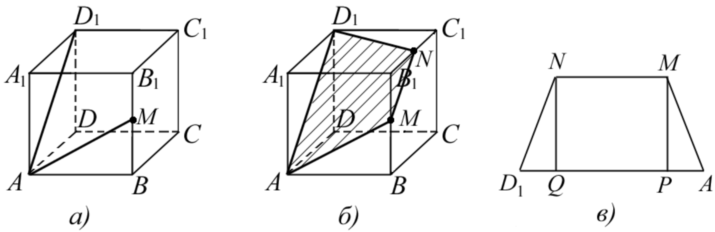


Рис. 9

15

Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C. Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C параллельны прямой AD_1.

Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, это линия пересечения параллельна и прямой BC_1. Проведем через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую параллельную прямой BC_1, ее пересечен6ие с ребром B_1C_1 дает вершину сечения. Сечение – трапеция $AMND_1$. Определим длины сторон этой трапеции. $AD = a\sqrt{2}$, MN – средняя линия в ΔBB_1C_1, поэтому $MN = \dfrac{1}{2}BC_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N

$$AB = C_1D_1 = = a;\ BM = NC_1 = a/2; \quad AM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Трапеция $AMND_1$ – равнобедренная. Найдем ее высоту. Опустим перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1, получаем $PQ = MN = a\sqrt{2}.$

$$D_1Q = PA = \frac{1}{2}(D_1A - PQ) = \frac{a}{2\sqrt{2}};\ NQ = h = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2 2}{16}} = \frac{a\sqrt{20-2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

23:16

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}(MN + D_1A)\cdot h = \frac{a\sqrt{2} + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{9a^2}{8}.$$

Ответ: $9a^2/8$.

Задача 6. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 и C (рис. 10) параллельно прямой BC_1. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB.

Решение. Плоскость сечения обозначим α. Линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C проходит через точку C параллельно прямой BC_1, ее точку пересечения с прямой BB_1 обозначим S_1. Точка S_1 – общая точка плоскостей α и AA_1B_1B. Еще одна общая точка A дана в условии.

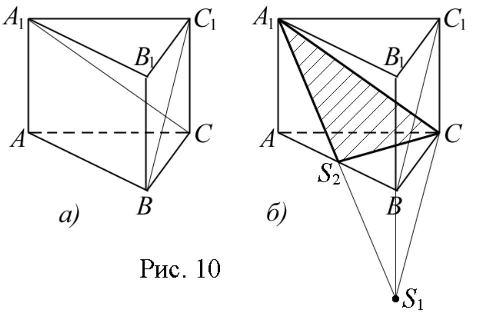


Рис. 10

Построим прямую AS_1, найдем вершину S_2 сечения. Сечение – треугольник $A_1C\,S_2$. Определим отношение $AS_2 : S_2B$.

$\Delta A_1AS_2 \sim \Delta S_1S_2B$.

Имеем: $$\frac{AS_2}{S_2B}=\frac{AA_1}{BS_1}.$$

Так как S_1BC_1C – параллелограмм $BC_1 \parallel C_1C$, $BC_1 \parallel S_1C$, то $BS_1 = C_1C$. Учитывая, что $AA_1 = C_1C$ получаем $AS_2 : S_2B = 1:1$.

Ответ: 1:1.

Задача 7. На ребре тетраэдра расположена точка M так, что $AM : AB = \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью проходящей через точку M и параллельно ребрам AD и BC. При каком λ это сечение будет ромбом, если $AD : BC = m$?

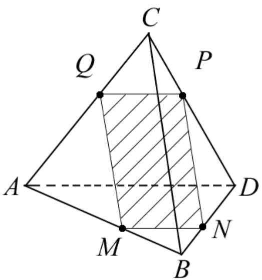


Рис. 11

Решение. Обозначим секущую плоскость α. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD через точку M параллельна прямой AD. Проводим $MN \parallel AD$ (рис. 11). Линия пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью α параллельна прямой BC. Строим $MQ \parallel BC$ и $NP \parallel BC$. Четвертая сторона сечения $PQ \parallel AD$. Сечение $MQPN$ – параллелограмм. Выразим длины сторон параллелограмма $MNPQ$ через длины ребер AD и BC.

Из подобия треугольников AMQ и ABC, имеем
$$\frac{MQ}{BC}=\frac{AM}{AB}=\lambda; \quad MQ=\lambda BC.$$

$$BM = AB - AM = (1-\lambda)AB.$$

Из подобия треугольников BMN и BAD получаем

$$\frac{MN}{AD} = \frac{BM}{BA} = 1-\lambda;\ MN = (1-\lambda)AD.$$

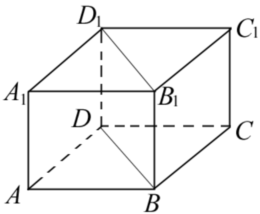
Подставим в равенство $MN = MQ$ полученные выражения, будем иметь

$$(1-\lambda)AD = \lambda BC;$$

$$\lambda = \frac{AD}{BC + AD} = \frac{m}{m+1}.$$

Ответ: сечение будет ромбом при $\lambda = \dfrac{m}{m+1}$.

2.2 Примеры решения некоторых задач



Задача 1. Определить боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота, площадь основания и площадь диагонального сечения соответственно равны h, Q, и M.

Решение. Имеем $S_{бок} = 2(a + b)\cdot h$, где a, b – стороны основания параллельного параллелепипеда.

По условию, $ab = Q$ и $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = M$.

Отсюда $\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{M^2}{h^2}; \\ 2ab = 2Q. \end{cases}$ $(a+b)^2 = \dfrac{M^2}{h^2} + 2Q.$ $a + b = \sqrt{\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q}.$

Теперь находим $S_{бок} = 2\sqrt{\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q} \cdot h = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}.$

Ответ: $S_{бок} = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}.$

Задача 2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность ее равна 144 см^2. Найти сторону основания и боковое ребро.

Решение. Пусть $AB = a$, $AA_1 = h$. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} a^2 + 2ah = 72, \\ 2a^2 + h^2 = 81. \end{cases} \quad \begin{cases} 2a^2 + 4ah = 144, \\ 2a^2 + h^2 = 81. \end{cases}$$

Решим систему: $$4ah - h^2 = 63, \quad a = \frac{63 + h^2}{4h}.$$

Подставим a в 1-ое уравнение

$$\left(\frac{63 + h^2}{4h}\right)^2 + 2\frac{63 + h^2}{4h}h = 72, \; h_1 = 3 \quad \text{или} \quad h_2 = 7.$$

Определяем $a_1 = 6$ см, $a_2 = 4$ см.

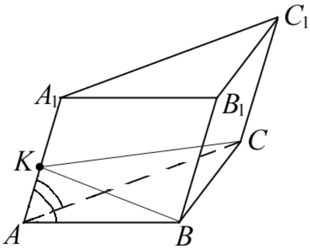
Ответ. 1. $A = 6$ см, $h = 3$ см;
2. $a = 4$ см; $h = 7$ см.

Задача 3. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы равные α. Найти боковую поверхность призмы.

23:16

Решение. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро b.

Пусть угол $\angle A_1AB = \angle A_1AC = = \alpha$. Построим перпендикулярное сечение призмы. Для этого проведем в плоскости AA_1B_1B прямую $BK \perp AA_1$ и соединим K и C. Докажем, что ΔBKC – перпендикулярное сечение призмы.



Имеем $\Delta AKC = \Delta AKB$ ($AC = AB$, AK – общая и $\angle KAC = \angle KAB = \alpha$).

Следовательно, $\angle AKC = \angle AKB = 90\,°$, т.е. $KC \perp AA_1$, кроме того, $KC = KB$.

$AA_1 \perp KB$, значит AA_1 перпендикулярна ΔABC, т.е. BKC – перпендикулярное сечение.

Вычислим периметр треугольника BKC:

$$P_\Delta = BC + KB + \quad + KC = BC + 2BK.BC = a,\ \ KB = a\cdot\sin\alpha,$$

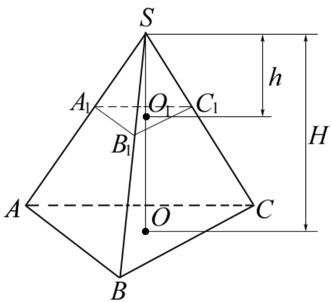
$$P_\Delta = a + 2a\cdot\sin\alpha =$$

$$= 2a\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha\right) = 2a\left(\sin 30^\circ + \sin\alpha\right) = 4a\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда $$S_{\text{бок}} = 4ab\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 4ab\sin\left(15^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right).$

Задача 4. В каком отношении разделится высота пирамиды, считая от вершины, параллельным сечением, площадь которого в 3 раза меньше площади основания?



Решение. $$S_{\text{осн}} : S_{\text{сеч}} = \frac{H^2}{h^2}.$$

По условию $\dfrac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = 3.$ Следовательно, $\dfrac{H^2}{h^2} = 3;$

$$\frac{H}{h} = \sqrt{3}.$$

Составим производную пропорцию

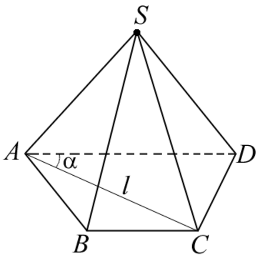
$\dfrac{H - h}{h} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1},$ т.е.

$$\frac{O_1O}{SO_1} = \sqrt{3} - 1, \quad \text{или} \quad \frac{SO_1}{O_1O} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Задача 5. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, диагональ которой l составляет с большим основанием угол α. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.



Имеем $$S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi}.$$

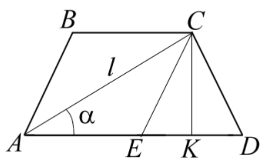
Найдем площадь трапеции. Проведем $CE \parallel AB$ и опустим высоту CK. Получился треугольник CED – равнобедренный, $EK = KD$;

$AD + BC = AE + EK + KD + BC = 2AK$.

Отсюда $(AD + BC)/2 = AKS_{\text{тр}} = AK \cdot CK$.

Из треугольника ACK:

$$AK = l\cdot\cos\alpha; \quad CK = l\cdot\sin\alpha.$$



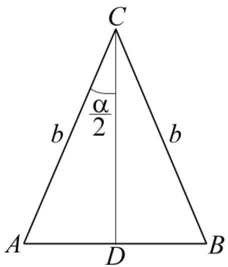
$$S_{ABCD} = l^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha. \; S_{\text{пол}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} + S_{ABCD} = S_{ABCD}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha \frac{2\cos^2(\varphi/2)}{\cos\varphi}.$$

$$S_{\text{пол}} = \frac{l^2 \sin 2\alpha \cos^2(\varphi/2)}{\cos\varphi}.$$

Ответ: $S_{\text{пол}} = \dfrac{l^2 \sin 2\alpha \cos^2(\varphi/2)}{\cos\varphi}.$

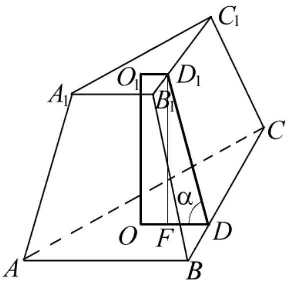
Задача 6. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α. Найти полную поверхность, если боковое ребро равно b.



Решение. На рисунке изображена боковая грань пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha \cdot 3 = \frac{3}{2} b^2 \sin\alpha; \quad S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где $a = AB = 2AD = 2b\cdot\sin(\alpha/2)$.



$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2b\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \sqrt{3}b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{пол}} = \frac{3}{2}b^2\sin\alpha + \sqrt{3}b^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}b^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{3}b^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{3}b^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2b^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2b^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача 7. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды соответственно равны a и b, причем $a > b$. Боковая грань образует с большим основанием угол α. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение. Из треугольника D_1FD имеем $DD_1 = DF/\cos\alpha$, но

$$DF = OD - O_1D_1 = \frac{BC}{2\sqrt{3}} - \frac{B_1C_1}{2\sqrt{3}} = \frac{a-b}{2\sqrt{3}},$$

поэтому

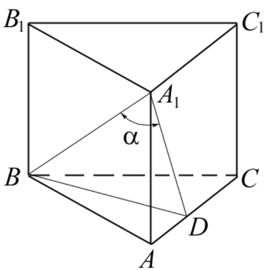
$$D_1D = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{В}} + S_{\text{Н}} = 3\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2\sqrt{3}\cos\alpha} + (a^2+b^2)\frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha} + \frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\alpha} + \dfrac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}$.

Задача 8. В правильной треугольной призме сторона основания равна a. Найти объем призмы, если диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол α.



Решение. По условию $AB = BC = AC = a$, A_1A перпендикулярна плоскости ABC, A_1B образует с плоскостью AA_1C_1C угол α.

27

Объем призмы

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H;\ \ S_{\text{осн}} = S_{\text{ABC}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Найдем H. Проведем $BD \perp AC$ и соединим D с A_1. Так как AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, то BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1C.

Следовательно, A_1D – проекция наклонной BA_1 на плоскость AA_1C_1C, поэтому $\angle BA_1D = \alpha$.

В треугольнике BA_1D угол $BDA_1 = 90\,°$, $A_1D = BD \cdot \text{ctg}\alpha$.

Далее имеем $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\quad A_1D = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\,\text{ctg}\,\alpha.$

Из треугольника AA_1D, в котором $AD = a/2$, угол $A_1AD = 90\,°$, следует, что

$$AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2\,\text{ctg}^2\,\alpha - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3\text{ctg}^2\alpha - 1} =$$

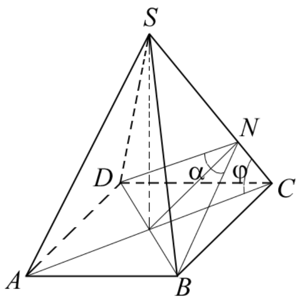
$$= \frac{a}{2}\sqrt{3\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) - 1} = \frac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{3 - 3\sin^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

23:16

$$=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)}.$$

$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\sin\alpha}\sqrt{\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)}.$$

Задача 9. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой длина стороны основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.



Решение. Опустим из точки B перпендикуляр BN на сторону SC и точку N соединим с CD.

$BC = CD$, $\angle SCD = \angle SCB$ и NC – общая сторона, то $\Delta BCN = \Delta DNC$ и следовательно, $DN \perp SC$, $\angle BND = \alpha$ является линейным углом между боковыми гранями.

Введем вспомогательный угол $\angle SCO = \varphi$. Из треугольника SOC следует, что $SO = H$,

$$H = OC\cdot \mathrm{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\varphi.$$

Треугольник ONC – прямоугольный, так как SC – перпендикуляр к плоскости BND

$$\sin\varphi = \frac{ON}{OC} = \frac{ON}{OB} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

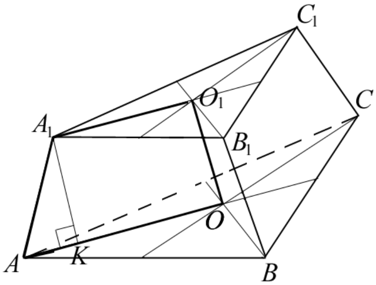
$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}\operatorname{ctg}(\alpha/2)\sin(\alpha/2)}{2\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\cos^2(\alpha/2)}} = \frac{a\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}{2\sqrt{-\cos\alpha}};$$

$$V = S_{\text{осн}}\cdot H = \frac{a^3\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}{6\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

Условием разрешимости задачи будет $\cos\alpha < 0$, т.е. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 10. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 см, стороны одного основания – соответственно 27, 29, 52 см, а периметр другого 72 см. Найти объем усеченной пирамиды.



Решение. По условию $H =$ $= 10$ см, по формуле Герона находим $Q = 270$. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон, которые в свою очередь, относятся как квадраты периметров, поэтому

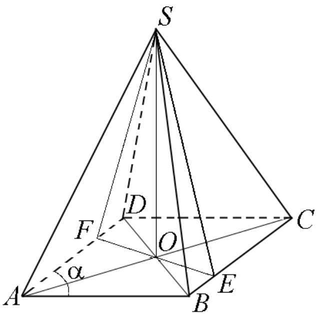
$$\frac{Q}{q} = \frac{P^2}{p^2},$$

где P и p – периметры оснований,

или $$\frac{270}{q} = \frac{108^2}{72^2},$$ отсюда $$q = \frac{270 \cdot 72^2}{108^2} = 120.$$

Тогда $$V = \frac{1}{3} \cdot 10(270 + \sqrt{270 \cdot 120} + 120) = 1900 \text{ см}^3.$$

Задача 11. В основании четырехугольной пирамиды, объем которого V, лежит ромб со стороной а и острым углом α. Все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Определить двугранный угол между противолежащими боковыми гранями.



Решение. Так как все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды проектируется в точку O пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

$$AB = BC = CD = DA = a, \quad \angle DAB = \alpha.$$

Для построения искомого угла проведем через SO плоскость, перпендикулярную граням SAD и SBC, для чего через точку O проведем перпендикуляр FE, и $\angle FSE$ – искомый угол

$$FO = OE \quad \text{и} \quad \angle FSO = \angle FSE/2,$$

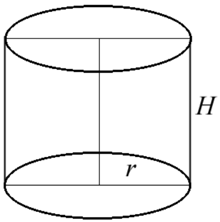
$$\operatorname{tg}\frac{\angle FSE}{2} = \frac{FO}{SO}; \quad V = \frac{1}{3}a^2 \sin\alpha \cdot SO,$$

$$SO = \frac{3V}{a^2 \sin\alpha}, \quad FO = \frac{a}{2}\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\angle FSE}{2} = \frac{a^3 \sin^2\alpha}{6V}, \quad \angle FSE = 2\operatorname{arctg}\frac{a^3 \sin\alpha}{6V}.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{a^3 \sin\alpha}{6V}$.

3. Фигуры вращения



Цилиндр. Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

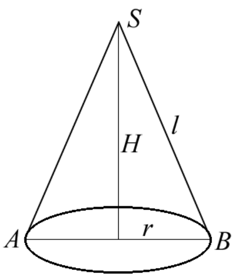
Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$V = \pi r^2 H.$$

Площадь боковой поверхности вычисляется $S_{бок} = 2\pi r H$.

$$S_{пол} = 2\pi r^2 + 2\pi r H,$$

где r – радиус основания конуса; H – высота конуса.



Конус. Прямым круговым конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

$SO = H$ – ось вращения; $SB = l$ – образующая конуса.

Объем конуса вычисляется по формуле $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H$.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $S = \pi rl$.

$$S_{\text{пол}} = \pi rl + \pi r^2.$$

Усеченный конус. Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется усеченным конусом.

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right),$$

где H – высота конуса; R – радиус нижнего основания; r – радиус верхнего основания.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + R)l.$$

<u>Шар.</u> Множество всех точек пространства, находящихся на данном положительном расстоянии R от данной точки пространства O, называется сферой. O – центр сферы.

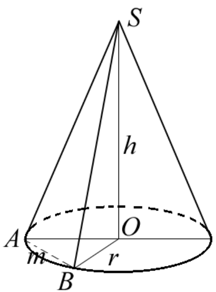
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3; \quad S_{\text{шара}} = 4\pi r^2.$$

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называют большим кругом.

Шаровой сегмент. (R – радиус шара; h – высота сегмента; S – площадь сферической поверхности сегмента; V – объем).

$$S = 2\pi Rh; \qquad V = \pi h^2(R - (1/3)h).$$

Задача 12. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.



Решение. Пусть $AO = r$; $SO = h$; V – объем конуса; V_1 и V_2 – объемы его частей.

Найдем V_1 как разность между объемами. Части конуса, основанием которой является сектор AOB, и пирамиды, в основании которой лежит треугольник AOB. Согласно условию, $AB = r$, т.е. AB – стороны вписанного правильного шестиугольника и, значит,

$$V_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\frac{r^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{1}{3}S_1 h,$$

где S_1 – площадь сегмента AmB. Тогда $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}S_2 h,$ где $S_2 = \pi r^2 - S_1$.

Таким образом $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2};$$

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}; \quad S_2 = \pi r^2 - \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{r^2(10\pi + 3\sqrt{3})}{12};$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$$

Задача 13. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90 °. Определить объем конуса.

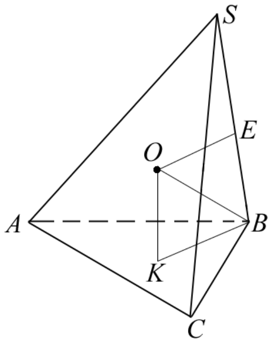
Решение. Пусть l – образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то $2\pi R = \frac{2\pi l}{4}$ (по условию, развертка представляет собой четверть круга), откуда $l = 4R$. Найдем высоту конуса.

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{16R^2 - R^2} = R\sqrt{15}.$$

Объем конуса $$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{15} = \frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}.$$

23:16

Задача 14. Основание пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно b. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.



Решение. Пусть O – центр шара, описанного около пирамиды $ABCS$. Тогда $OA = OB = OC = OS$. Опустим перпендикуляр OK на плоскость ABC и проведем $OE \perp SB$. Поскольку O равноудалена от вершины треугольника ABC, точка K является центром треугольника.

$$BK = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$\left(h_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ BK = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

Далее, так как $OB = OS$, то $EB = ES = b/2$.

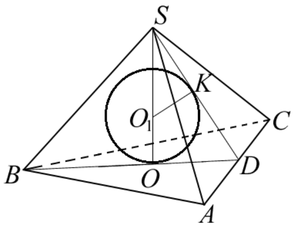
Следовательно, $OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}$.

37

23:16

Задача 15. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.



Решение. Для отыскания радиуса шара проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему. Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Тогда все ребра пирамиды равны a, то

$$SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из треугольника SOD следует

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Обозначим радиус шара через r, тогда $SO_1 = SO - r$. В треугольнике SKO_1 имеем

$$O_1K^2 = SO_1^2 - SK^2, \qquad \text{или} \quad r^2 = (SO - r)^2 - \frac{a^2}{3},$$

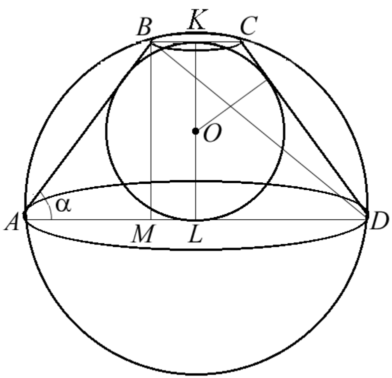
Откуда
$$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2a\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^3}{3}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

$$S_{шара} = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{6}$.

Задача 16. Радиус шара, вписанного в усеченный конус, равен R, а радиус шара, описанного около этого усеченного конуса, равен $R\sqrt{30}$. Найти угол между образующей усеченного конуса и его основанием.

Решение. Сделаем чертеж к этой задаче.



Пусть $\angle BAD = \alpha$.

Проведем $BM = KL = 2R$,

$$MD = \frac{AD + BC}{2}.$$

Так как в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то $AD + BC = AB + CD = 2AB$.

$$MD = \frac{AD + BC}{2} = \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{2} = AB.$$

Но $AB = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$ (из треугольника AMB), поэтому $MD = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$.

Из треугольника BMD следует, что

$$BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{4R^2 + \frac{4R^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{2R}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}.$$

По теореме синусов $BD = 2R\sqrt{30}\sin\alpha$, поэтому

$$\frac{2R}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha} = 2R\sqrt{30}\sin\alpha, \quad 1 + \sin^2\alpha = 30\sin^4\alpha.$$

Обозначим $\sin^2\alpha = y$, $y > 0$, $y^2 - 30y + 1 = 0$, $y = 0{,}2$.

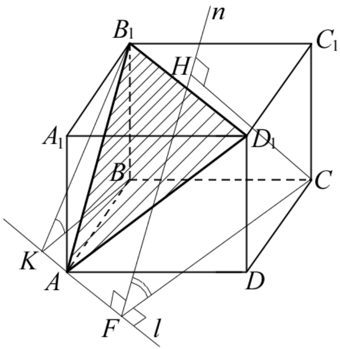
$$\sin^2\alpha = 0{,}2; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

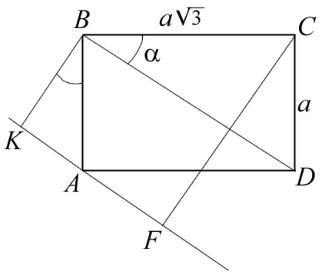
Получим, $\cos 2\alpha = 0{,}6$. Следовательно, $\alpha = (1/2)\arccos 0{,}6$.

Ответ: $\alpha = (1/2)\arccos 0{,}6$.

Замечание. При вычислении расстояния от точки до плоскости необходимо выполнить следующее:

1. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости;
2. Искомое расстояние до плоскости есть перпендикуляр, опущенный из данной точки на линию пересечения плоскостей (данной и ей перпендикулярной).





Задача 17. В прямоугольном параллелепипеде a и $a\sqrt{3}$ – стороны основания; h – высота. Вычислить расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1.

Решение. Расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1 есть перпендикуляр на эту плоскость, опущенный из этой точки. Построим этот перпендикуляр. Проведем $Al \parallel B_1D_1$. Это будет линия пересечения AB_1D_1 и $ABCD$ на основании теоремы о пересечении двух параллельных плоскостей третьей. Из точки C опустим на Al перпендикуляр CF. Из F по плоскости AB_1D_1 восстанавливаем перпендикуляр Fn.

Тогда $nFC \perp AB_1D_1$ и Fn – линия пересечения этих плоскостей. Значит, расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1 есть перпендикуляр к Fn, т.е. CH.

Из треугольника HFC следует CH = FC·sin∠HFC.

Определим этот угол. Для этого построим плоскость B_1BK параллельную HCF, тогда $\angle HFC = \angle B_1KB$.

$$\sin\angle B_1KB = \frac{B_1B}{KB_1}, \quad KB = \frac{FC}{2}, \quad B_1B = h.$$

В треугольнике *BCD* (рис. 28, *б*) $\frac{CD}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

следовательно $\alpha = 30°$. $\angle KBA = 30°$, $KB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FC = a\sqrt{3}$.

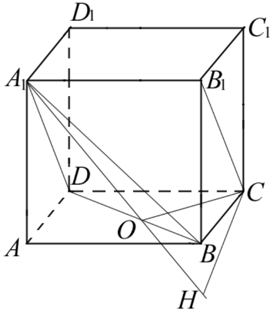
$$\sin\angle B_1KB = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

$$CH = a\sqrt{3}\,\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

Ответ: $a\sqrt{3}\,\frac{a\sqrt{3}\cdot 2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Задача 18. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить полную поверхность куба.

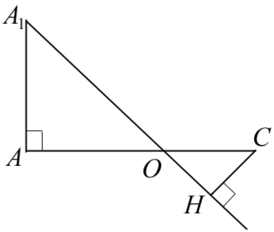
Решение. Пусть расстояние между непересекающимися диагоналями A_1B и B_1C равно d. Построим отрезок d. Перенесем B_1C параллельно себе до пересечения с A_1BD. Для этого из C опустим перпендикуляр на BD. Из точки O восстановим перпендикуляр к BD по плоскости A_1BD. Линия A_1O – это линия пересечения перпендикулярных плоскостей A_1BD и COA_1. Тогда перпендикуляр CH и есть расстояние от C до плоскости A_1BD и $CH = = d$.



Выразим ребро куба через d. Пусть ребро куба – a. Тогда $AC = a\sqrt{2}$.

Из треугольника OCH: $OC = \dfrac{HC}{\sin \angle O}$.

Из треугольника A_1OA:



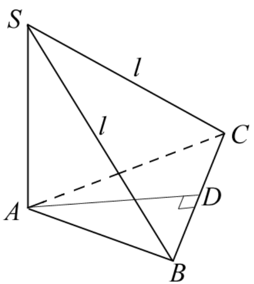
$$\sin \angle O = \frac{A_1A}{A_1O} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad a = d\sqrt{3}.$$

Полная поверхность куба $\quad 6a^2 = 6d^2 \cdot 3 = 18d^2.$

Ответ: $18d^2$.

Задача 19. Основание пирамиды – правильный треугольник, одно из боковых ребер совпадает с высотой пирамиды, длины двух других боковых ребер равны l. При какой длине высоты пирамиды ее объем будет наибольшим? Найти этот объем.



Решение. $SABC$ – пирамида. По условию $SA \perp ABC$,

$$SC = SB = l. \; V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot AS.$$

Пусть $AS = x$.

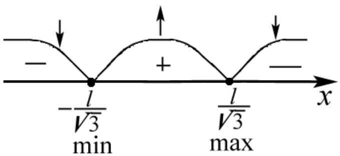
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AD.$$

Из треугольника ASB: $AB = \sqrt{SB^2 - AS^2} = \sqrt{l^2 - x^2}$;

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{l^2 - x^2}. \quad V = \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{l^2 x - x^3}.$$

Для определения значений x, при котором объем пирамиды принимает наибольшее значение, найдем производную функции $V(x)$ и ее критические точки:

$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 x - x^3)' = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 - 3x); \; l^2 - 3x = 0;$$



$$x = \pm\frac{l}{\sqrt{3}}.$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} - \text{ точка максимума } V(x).$$

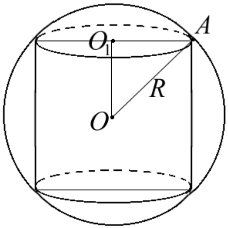
$$V = V\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right)\cdot\frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l^3}{18}.$$

Ответ: $\frac{l}{\sqrt{3}}$; $\frac{l^3}{18}$.

45

23:16

Задача 20. Дан шар с радиусом R. Вычислить радиус основания и образующую вписанного в него цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.



Решение. Обозначим радиус основания цилиндра x, а длину образующей l, $x \in (0, R)$; $l \in (0, R)$.

Выразим площадь боковой поверхности цилиндра через функцию радиуса основания x.

Из треугольника OO_1A имеем

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - x^2; \qquad l = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Подставим l в формулу площади боковой поверхности цилиндра, получим

$$S_{\text{бок}} = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Для определения значений x, при которых площадь боковой поверхности цилиндра принимает наибольшее значение, найдем производную

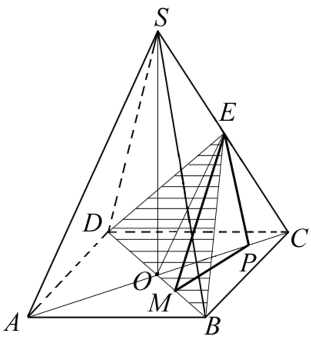
$$S'(x) = \left(4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\right)' = 4\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = 0,$$

$$R^2 - x^2 - x^2 = 0, \quad x^2 = \frac{R^2}{2}, \quad x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.\ x = \frac{R}{\sqrt{2}} - \text{это точка max функции.}$$

$$l = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{2}, \quad \text{т.е. } x = \frac{l}{2}.$$

Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2}}$; $R\sqrt{2}$.

Задача 21. Основанием пирамиды служит прямоугольник со стороной a и $2a$. Все боковые ребра равны $10\sqrt{5}$. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведено сечение. Найти значение a, при котором площадь сечения является наибольшей.



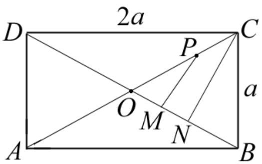
Решение. 1. Определим условия существования пирамиды. Из треугольника DBC имеем

$DB \le DS + SB$.

Так как $DO = OB$, $DS = SB$, то $OD \le DS$. Следовательно, для существования пирамиды, необходимо, чтобы ее боковое ребро было не меньше половины длины диагонали основания, т.е.

$$10\sqrt{5} \geq AO, \quad \text{где} \quad AO = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ тогда } a \leq 20.$$

2. Для построения сечения по условию задачи проведем $OE \parallel AS$ и треугольник DEB – искомое сечение, причем $SE = EC$. Не следует считать OE в треугольнике BDE высотой на BD; OC не перпендикуляр BD.



Построим эту высоту, проведя перпендикуляр EP и PM. Тогда $EM \perp BD$,

$$S_{DEB} = \frac{1}{2} BD \cdot EM; \qquad BD = a\sqrt{5}.$$

Вычислим $EM = \sqrt{EP^2 + PM^2}$. Проведем вспомогательную линию $CN \perp BD$. Из треугольника OCN видно, что

$$PM = \frac{CN}{2}.$$

Из треугольника BDC:

$$NC = \frac{BC \cdot CB}{BD} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; \quad PM = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

48

Из треугольника SOC: $EP = \dfrac{SO}{2}$.

Так как $SO = \sqrt{100 \cdot 5 - \dfrac{5a^2}{4}}$, то $EP = \dfrac{1}{2}\sqrt{500 - \dfrac{5a^2}{4}}$.

Из треугольника EMP находим $EM = \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(500 - \dfrac{5a^2}{4}\right) + \dfrac{a^2}{5}}$.

Искомая площадь

$$S_{DEB} = \frac{1}{2} a\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{500}{4} + \frac{a^2}{5} - \frac{5a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9a^2}{80}}.$$

$$S'(a) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9}{80}a^2} + \frac{-a \cdot \frac{18}{80}a}{2\sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9}{80}a^2}}\right] = 0;$$

$$\frac{500}{4} - \frac{9}{80}a^2 - \frac{9}{80}a^2 = 0; \quad \frac{500}{4} - \frac{18}{80}a^2 = 0; \quad a = \frac{100}{3\sqrt{2}}.$$

49

При $a \in \left(0; \frac{100}{3\sqrt{2}}\right)$ функция $S(a)$ возрастает.

Тогда и $a \in (0,20) \subset \left(0, \frac{100}{3\sqrt{2}}\right)$ функция $S(a)$ возрастает и достигает наибольшего значения при $a = 20$.

$$S_{\max}(a) = S(20) = 200 \text{ кв. ед.}$$

Ответ: 20.

23:16

3.1 Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.
Ответ: 4.

2. Ребро куба равно $10/\sqrt{2}$. Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до пересекающего его ребра. *Ответ*: 5.

3. Площадь сечения куба плоскостью проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.
Ответ: 2.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол в 45 °. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Определите его объем. *Ответ*: 60.

5. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 и расстояния между ними 26, 25, 17 линейных единиц. Определите объем призмы.
Ответ: 3060.

6. В правильной треугольной пирамиде вычислите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если отношения бокового ребра к стороне основания равно 2:3. Ответ запишите в градусах.

Ответ: 30 °.

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 5 и 5. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью ее основания равные двугранные углы, содержащие по 45 °. Определите объем этой пирамиды.

8. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Определите боковую поверхность этой пирамиды. *Ответ*: 768.

9. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом в 30 °, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60 °. Определите объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $4\sqrt{3}$.

Ответ: 1536.

10. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 12, составляет с высотой пирамиды угол в 30 °. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 324. **11.** Определите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а стороны оснований соответственно равны 14 и 10. *Ответ*: 872.

12. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 см, стороны одного основания соответственно равны 27, 29, 52 см, а периметр другого равен 72 см. Найдите объем усеченной пирамиды.

Ответ: 1900.

13. Прямой круговой конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен $3\sqrt[4]{5}$. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара. *Ответ*: 45π.

14. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса 120 °, образующая конуса равна 6. Найти радиус шара описанного около этого конуса.

Ответ: 6.

15. Боковая поверхность конуса в 3 раза больше площади основания. Найдите угол его развертки. *Ответ*: 120 °.

16. Площадь осевого сечения цилиндра равна $16/\pi$ дм^2. Найдите площадь его боковой поверхности. *Ответ*: 16.

17. Ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и острым углом 60 ° вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярна его стороне. Найти объем полученного тела вращения.

Ответ: 169,56.

18. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Площадь прямоугольника равна 17, а длина окружности, описанной точкой пересечения его диагонали равна 5. Найдите объем этого цилиндра.

Ответ: 85.

19. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 1:1. Площадь основания больше площади сечения на 381. Найдите площадь основания. *Ответ*: 508.

20. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к плоскости основания проведена плоскость. Определите площадь сечения, если апофема пирамиды равна l, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

Ответ: $\dfrac{l^2 \sin^2 2\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

21. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D находятся на плоскости α, а B и C – вне ее. Сторона $AD = 10$ см, $AB = 15$ см, проекции диагоналей AC и BD на плоскость α соответственно равны: $AC_1 = 13{,}5$ и $B_1D = 10{,}5$. Найдите диагонали.
Ответ: 19; 17.

22. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислите боковую поверхность образовавшейся пирамиды, если ребро куба равно 7.
Ответ: 73,5.

23. Стороны основания правильной четырехугольной призмы равна 15, а высота 20. Найдите кротчайшее расстояние от стороны снования до не пересекающей ее диагонали призмы.

Ответ: 12.

24. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани квадраты. Определите ребро этой призмы. *Ответ*: $\dfrac{HR\sqrt{3}}{H - R\sqrt{3}}$.

25. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 29$ см, $AD = = 36$ см, $BC = 25$ см и боковое ребро равно 48 см, Найдите площадь сечения $AB_1C_1D_1$.

Ответ: 1872 см^2.

26. Основание пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания: $AB = 3$ см; $SA = 4$ см. Докажите, что в пирамиду можно вписать сферу и найдите радиус этой сферы.

27. В шар вписан конус, объем которого равен 96π см^3. Вычислите: 1. Площадь поверхности конуса; 2. Объем шарового сегмента, отсекаемого плоскостью основания конуса.

Ответ: 96 см^2; $96\dfrac{3}{16}\pi$ см^3.

28. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер пирамиды также равно a, а два других равны b. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - a^2}}{2\sqrt{4a^2b^2 - a^4 - b^4}}$.

23:16

29. В правильной треугольной призме расстояние от одной из сторон основания до наиболее удаленной от этой стороны вершины призмы равно d. При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим? Найдите этот объем.

Ответ: $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{2d^2}{9}$.

30. Длина диагонали боковой грани правильной шестиугольной призмы равна d. Какова должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите этот объем. *Ответ*: $d/\sqrt{3}$; d^2.

31. В правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписан цилиндр. При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Найдите этот объем.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2 h}{27}$; $\dfrac{h}{3}$.

32. Сфера радиусом r вписана в конус. При какой высоте конуса площадь его боковой поверхности будет наименьшей? Найдите эту площадь. *Ответ*: $\pi r^2(3+2\sqrt{2})$ при высоте $r(2+\sqrt{2})$.

33. В правильной треугольной пирамиде, вписанной в сферу, расстояние от центра сферы до боковой грани равно d, а боковое ребро в два раза больше высоты основания. Между сферой и пирамидой расположен цилиндр, одно из оснований

23:16

которого лежит в плоскости боковой грани, а окружность другого основания принадлежит сфере. Какой наибольший объем может иметь этот цилиндр?

Ответ: $\pi \frac{1408}{27} d^3$.

4. Тесты

1. Определите величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.

1. 60 °; *2*. 30 °; *3*. 45 °; *4*. 90 °;
5. правильный ответ не указан.
Выберите правильный ответ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки B, D, и C_1 и плоскостью основания.

1. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; *2*. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$; *3*. 45 °; *4*. $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$.
5. правильный ответ не указан.

3. Площадь диагонального сечения куба равна $8\sqrt{2}$ см^3. Найдите площадь поверхности куба.

1. $36\sqrt{2}$; *2*. $24\sqrt{2}$; *3*. 36; *4*. 48;
5. правильный ответ не указан.

4. Определите диагональ прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 2, 3, 6. Укажите правильный ответ.

1. 7; *2*. $\sqrt{7}$; *3*. $\sqrt{13}$; *4*. 13;

5. правильный ответ не указан.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь основания равна 16 см^2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1D.

1. $\sqrt{2}$; *2*. $2\sqrt{2}$; *3*. 4; *4*. 16;

5. правильный ответ не указан.

6. Определите радиус основания цилиндра, полная поверхность которого равна 30π дм^2, а площадь осевого сечения 12 дм^2. Укажите правильный ответ.

1. 3; *2*. 4; *3*. $\sqrt{3}$; *4*. 5;

5. правильный ответ не указан.

7. Если ребро правильного октаэдра равно $15\sqrt{6}$, то объем октаэдра равен:

1. $27\sqrt{2}$; *2*. $4{,}5\sqrt{3}$; *3*. $13{,}5\sqrt{3}$; *4*. $9\sqrt{3}$.

5. правильный ответ не указан.

8. Если сфера радиуса 1 касается всех граней правильной шестиугольной призмы, то длина ребра основания призмы равна

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; *2*. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; *3*. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; *4*. $2\sqrt{5}$.

5. правильный ответ не указан.

9. Высота цилиндра равна диаметру основания. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 104, то площадь основания цилиндра равна:

1. 23; *2*. $23\sqrt{2}$; *3*. 26;

4. Правильный ответ неуказан.

10. Диагональное сечение правильной шестиугольной призмы делит ее на две неравные части. Отношение боковых поверхностей этих частей равно:

1. $\frac{5+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; *2*. $\frac{4+\sqrt{3}}{3}$; *3*. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$; *4*. $\frac{5+2\sqrt{3}}{13}$.

5. правильный ответ не указан.

11. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

1. $33\frac{1}{3}$ %; *2*. 33 %; *3*. 67 %; *4*. $66\frac{2}{3}$ %.

5. правильный ответ не указан.

12. Двугранный угол равен 45 °. На одной грани дана точка на расстоянии *a* от другой. Расстояние этой точки от ребра равно:

1. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; *2*. a; *3*. $\sqrt{2}$; *4*. $a\sqrt{2}$.

5. правильный ответ не указан.

13. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, причем один из его углов равен β, а его сторона m. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с основанием угол α. Высота пирамиды равна:

1. $\frac{m\sin\beta}{\mathrm{tg}\alpha}$; *2*. $m\sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha$; *3*. $m\,\mathrm{tg}\alpha$; *4*. $\frac{m}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha}$.

5. правильный ответ не указан.

14. В основании наклонной призмы $CDEFC_1D_1E_1F_1$ лежит трапеция $CDEF$, причем $DE \parallel CF$ и $CF = 4$ см; $EF = 13$ см; $CD = DE = = 20$ см. Плоскость диагонального сечения, проходящего через точку C перпендикулярна основанию и равна $30\sqrt{20}$ см. Найдите объем призмы.

1. $640\sqrt{6}$; *2*. 980; *3*. $720\sqrt{3}$; *4*. $0{,}925\sqrt{2}$.

15. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного возле куба, больше площади поверхности шара вписанного в тот же куб.

1. 3; *2*. $\frac{17}{3}$; *3*. $\frac{5}{4}$; *4*. Правильного ответа нет.

16. Около прямого кругового конуса описан шар. Угол при вершине осевого сечения этого конуса равен 60 °. Во сколько раз объем шара больше объема конуса?

1. 32/9; *2*. 32/7; *3*. 31/3.

17. В шар вписан равносторонний конус. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

1. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; *2*. 32/9; *3*. 29/3; *4*. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

23:16