

Томский политехнический университет

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

Пособие для абитуриентов

Томск 2004

1. Прямые и плоскости в пространстве

1.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве:

- а) лежат в одной плоскости, при этом имеют общую точку, т.е. пересекаться, или не иметь общей точки, тогда их называют *параллельными*;
- б) не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют *скрещивающимися*.

Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен углу, образованному двумя лучами, выходящими из одной точки и параллельными этим скрещивающимся прямым.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной их общего перпендикуляра между точками, расположенными на этих прямых. Это расстояние есть наименьшее.

1.2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*, если прямая перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей плоскости.

Теорема 1. (признак перпендикулярности прямой и плоскости) Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Прямую, пересекающую плоскость, но не перпендикулярную ей, называют *наклонной* к плоскости.

Угол между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

BC – наклонная; AC – ее проекция; $\angle BCA$ – угол между прямой BC и плоскостью α ; AB – длина перпендикуляра от точки B до плоскости α .

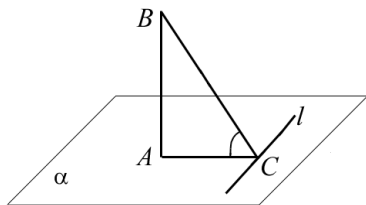


Рис. 1

Теорема 2. (о трех перпендикулярах) Прямая l , лежащая в некоторой плоскости α , перпендикулярна наклонной, если она перпендикулярна ее ортогональной проекции (рис. 1).

Теорема 3. (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама

прямая параллельна этой плоскости.

1.3. Взаимное расположение плоскостей

Признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β , исходящими из одной прямой AB .

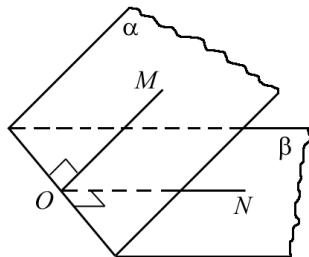


Рис. 2

Прямая AB называется *ребром*, а полуплоскости – *гранями* двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восстановленными к ребру из произвольной его точки, т.е. $\angle MON$.

Двугранный угол измеряется его линейным углом.

2. Многогранники

Многогранник – тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

Призма. Многогранник, две грани которого равные n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а ребра всех остальных граней параллельны, называется n -угольной призмой.

Два равных n -угольника называют *основаниями призмы*; остальные грани – *боковыми гранями призмы*. Все боковые ребра призмы равны.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям основания, называется *прямой призмой*.

Правильная призма – прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

Площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}} = P_{\text{п}} \cdot AA_1$, где $P_{\text{п}}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы; AA_1 – длина бокового ребра.

Объем наклонной призмы $V = S_{\text{п}} \cdot AA_1$, где $S_{\text{п}}$ – площадь перпендикулярного сечения призмы; AA_1 – длина бокового ребра; или $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; H – высота призмы.

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы.

Свойства параллелепипеда:

1. Середина диагонали является его центром симметрии;
2. Противлежащие грани попарно равны и параллельны;
3. Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Прямым называют параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания. В противном случае параллелепипед называют *наклонным*.

Прямоугольный параллелепипед – это прямой параллелепипед, у которого основания – прямоугольники.

Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a, b, c – длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Все грани куба – квадраты. Объем куба $V = a^3$.

Пирамида. *Пирамидой* называется многогранник, одна грань которого (называемая основанием) – многоугольник, а остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной (вершина пирамиды). По числу вершин (сторон) основания различают треугольные, четырехугольные и т.д. пирамиды.

Тетраэдр – треугольная пирамида, у которой все грани – правильные треугольники (одно из пяти тел Платона).

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника.

Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани.

В правильную пирамиду можно вписать сферу и вокруг нее можно описать сферу.

В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу и вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу; в каждом из этих случаев сфера будет единственной.

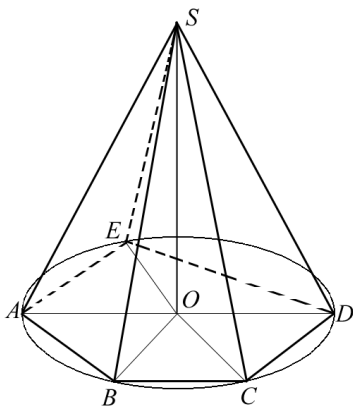


Рис. 3

Теорема. Пусть дана произвольная пирамида (рис. 3). Тогда равносильны следующие три условия:

1. все боковые ребра пирамиды равны друг другу;
2. все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом;
3. существует окружность, описанная около основания, центр которой совпадает с ортогональной проекцией вершины пирамиды на основание.

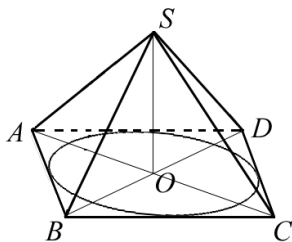


Рис. 4

Теорема. Пусть дана произвольная пирамида с вершиной в точке S ; SO – ее высота, причем точка O лежит внутри основания (рис. 4). Тогда равносильны следующие три условия:

1. все высоты боковых граней пирамиды, опущенные из вершины, равны друг другу;
2. все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом;
3. существует окружность, вписанная в основание, центр которой совпадает с точкой O .

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания; H – высота пирамиды.

Подобие многогранников. Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются сходственными. У подобных многогранников:

1. двугранные углы равны и одинаково расположены;
2. сходственные ребра пропорциональны.

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1. Если в пирамиде проведем секущую плоскость, параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной;
2. Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных линейных элементов многогранников;
3. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов многогранников;
4. Квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.

2.1 Построение плоских сечений многогранников

Построить сечение многогранника плоскостью – это значит построить прямые, являющиеся следом пересечения граней многогранника данной плоскостью. Секущая плоскость может быть задана различными способами, например,

1. тремя точками не лежащими на одной прямой;
2. прямой и точкой, не лежащей на ней;
3. двумя пересекающимися прямыми;
4. некоторыми из указанных выше геометрических элементов совокупности с различными зависимостями между ними и элементами.

Для построения сечений многогранников плоскостью применяют два способа построения следов и соответствия.

Способ построения следов состоит в том, что плоскости нижнего основания многогранника (иногда на другой плоскости) выполняется построение следов (линий пересечения секущей с плоскостью). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника. ~~Построение~~ ~~сечений~~ ~~основано~~ ~~на~~ ~~простом~~ ~~следствии~~ ~~из~~ ~~аксиом~~ ~~стереометрии~~: если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является линией пересечения этих плоскостей.

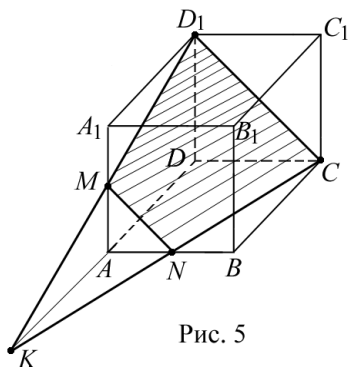


Рис. 5

Тогда точка K принадлежит плоскости грани AA_1DD_1 и плоскости, которую мы проводим. Значит линия KD_1 – след, который должен пересечь ребро AA_1 в точке M .

Задача 1. Построить сечение куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1 (рис. 5).

Так как точки D_1 и C принадлежат грани DD_1CC_1 и плоскости, которую мы проводим, то соединяющая их линия есть линия пересечения грани и плоскости, т.е. след.

Для построения других следов продлим линию NC до пересечения с продолжением ребра AD в точке K .

Тогда $MNCD_1$ – искомое сечение.

Задача 2. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки K, L, M , лежащие на пересекающихся ребрах (рис. 6).

1. Опустим перпендикуляр LN из точки L на прямую AD .

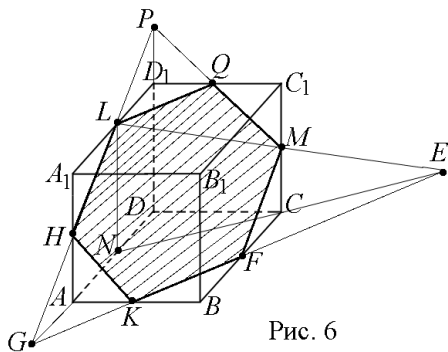


Рис. 6

2. Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E . Обе эти прямые лежат в одной плоскости, определяемой тремя точками L, M, N и не параллельны, следовательно обязательно пересекутся в точке E .

3. Так как $NC \subset ABCD$; LM принадлежит плоскости, которую проводим, значит E принадлежит этой же плоскости.

4. Проведем прямую EK до пересечения с продолжением AD в точке G .

5. Проведем прямую GL до пересечения с продолжением ребра DD_1 в точке P . Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получим точку Q . Точки L, Q, M, F, K, H последовательно соединим. Фигура $LQMFKH$ – искомое сечение.

Задача 3. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $1/3$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $1/4$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α , которая пересекает прямые, лежащие на ребрах $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$ соответственно в точках N и Q . Найдите объем пирамиды $NEQA_1$.

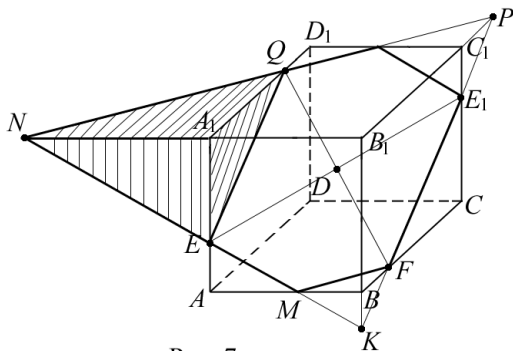


Рис. 7

Решение.

1. Построим сечение.

$$2. V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1 E \cdot A_1 O \cdot A_1 N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} A_1 N = \frac{1}{12} A_1 N.$$

$$3. \Delta KBF \sim \Delta E_1CF; \quad \frac{BF}{BK} = \frac{CF}{E_1C}. \quad \text{Отсюда} \quad BK = \frac{BF \cdot E_1C}{CF};$$

$$BK = \frac{(1/4) \cdot (2/3)}{(3/4)} = \frac{2 \cdot 4}{12 \cdot 3} = \frac{2}{9}; \quad B_1K = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}.$$

$$4. \Delta NA_1E \sim \Delta NB_1K; \quad \frac{NA_1}{NB_1} = \frac{A_1E}{B_1K}.$$

Пусть

$$NA_1 = x, \text{ то } \frac{x}{1+x} = \frac{2/3}{11/9}; \quad \frac{11}{9}x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x; \quad \frac{(11-6)}{9}x = \frac{6}{9};$$

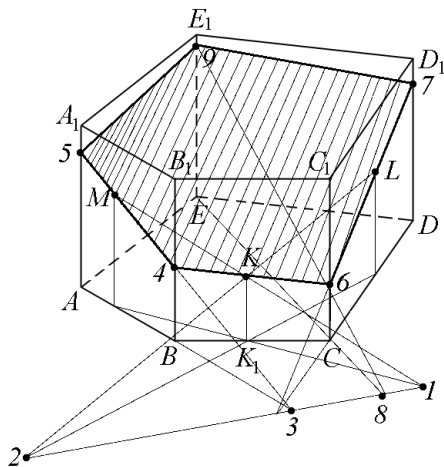
$$5x = 6, \quad x = 6/5.$$

$$5. A_1N = 2/5; V = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 1/10.

Задача 4. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M , причем $K \in BB_1C_1C$; $L \in CC_1D_1D$; $M \in AA_1B_1B$ (рис. 8).

1. Построим точки встречи прямых MK и KL с плоскостью основания призмы. Для этого спроецируем M и L на основание в точки M_1 и L_1 соответственно.



Тогда пересечение M_1K и MK дает точку 1 – точку встречи прямой MK с плоскостью основания, а пересечение прямых KL и L_1K дают точку 2 – точку встречи прямой KL с плоскостью основания. Точки 1 и 2 определяют след плоскости (линию пересечения плоскости MLK с плоскостью основания). Продолжим прямую AB до пересечения с прямой $1, 2$ в точке 3 . Через 3 и M проведем прямую в грани AA_1B_1B . Прямая пересечет боковые ребра AA_1 и BB_1 и тем самым определит верши-

ны сечения 4 и 5. Затем определяем вершины 6 и 7, продолжив до пересечения со следом сторону CD .

Вершину ребра EE_1 . Продлим диагональ EC до пересечения со следом в точке 8. Соединим 8 и 6 продолжая до пересечения с ребром EE_1 в точке 9.

Соединим точки 5 и 9, 9 и 7. Получим сечение.

Одним из **недостатков** является тот факт, что при малом наклоне плоскости сечения плоскости основания след оказывается весьма удаленным от основной части чертежа.

Задача 5. Длина ребра куба равна a . Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 .

Решение. Пусть секущая плоскость α . Отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости α и грани куба, поэтому являются сторонами сечения (рис. 9).

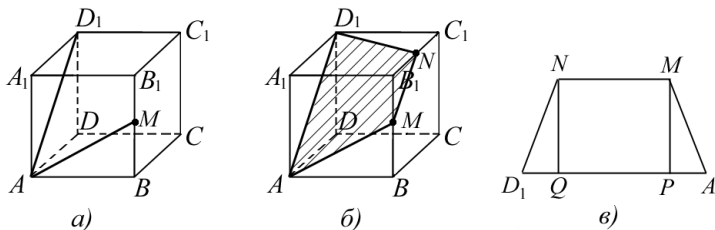


Рис. 9

Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C . Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1 .

Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, это линия пересечения параллельна и прямой BC_1 . Проведем через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую параллельную прямой BC_1 , ее пересечение с ребром B_1C_1 дает вершину сечения. Сечение – трапеция $AMND_1$. Определим длины сторон этой трапеции.

$AD = a\sqrt{2}$, MN – средняя линия в $\triangle BB_1C_1$, поэтому $MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N

$$AB = C_1D_1 = a; \quad BM = NC_1 = a/2; \quad AM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Трапеция $AMND_1$ – равнобедренная. Найдём её высоту. Опустим перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1 , получаем $PQ = MN = a\sqrt{2}$.

$$D_1Q = PA = \frac{1}{2}(D_1A - PQ) = \frac{a}{2\sqrt{2}}; \quad NQ = h = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2 \cdot 2}{16}} = \frac{a\sqrt{20-2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} (MN + D_1A) \cdot h = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{9a^2}{8}.$$

Ответ: $9a^2/8$.

Задача 6. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 и C (рис. 10) параллельно прямой BC_1 . Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB .

Решение. Плоскость сечения обозначим α . Линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C проходит через точку C параллельно прямой BC_1 , ее точку пересечения с прямой BB_1 обозначим S_1 . Точка S_1 – общая точка плоскостей α и AA_1B_1B . Еще одна общая точка A дана в условии.

Построим прямую AS_1 , найдем вершину S_2 сечения. Сечение – треугольник A_1CS_2 . Определим отношение $AS_2 : S_2B$.

$$\Delta A_1AS_2 \sim \Delta S_1S_2B.$$

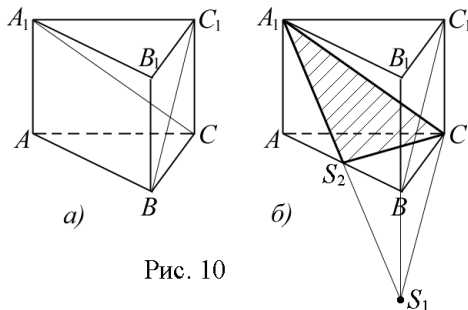


Рис. 10

Имеем:
$$\frac{AS_2}{S_2B} = \frac{AA_1}{BS_1}.$$

Так как S_1BC_1C – параллелограмм $BC_1 \parallel C_1C$, $BC_1 \parallel S_1C$, то $BS_1 = C_1C$.
Учитывая, что $AA_1 = C_1C$ получаем $AS_2 : S_2B = 1:1$.

Ответ: 1:1.

Задача 7. На ребре тетраэдра расположена точка M так, что $AM : AB = \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью проходящей через точку M и параллельно ребрам AD и BC . При каком λ это сечение будет ромбом, если $AD : BC = m$?

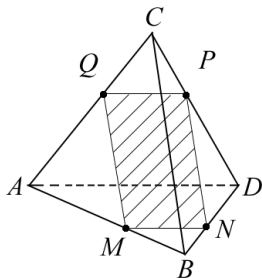


Рис. 11

Решение. Обозначим секущую плоскость α . Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD через точку M параллельна прямой AD . Проводим $MN \parallel AD$ (рис. 11). Линия пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью α параллельна прямой BC . Строим $MQ \parallel BC$ и $NP \parallel BC$. Четвертая сторона сечения $PQ \parallel AD$. Сечение $MQPQ$ – параллелограмм. Выразим длины сторон параллелограмма $MNPQ$ через длины ребер AD и BC .

Из подобия треугольников AMQ и ABC , имеем

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AB} = \lambda; \quad MQ = \lambda BC.$$

$$BM = AB - AM = (1 - \lambda)AB.$$

Из подобия треугольников BMN и BAD получаем

$$\frac{MN}{AD} = \frac{BM}{BA} = 1 - \lambda; \quad MN = (1 - \lambda)AD.$$

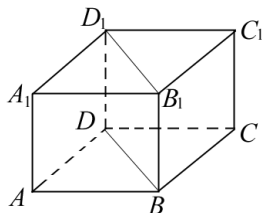
Подставим в равенство $MN = MQ$ полученные выражения, будем иметь

$$(1 - \lambda)AD = \lambda BC;$$

$$\lambda = \frac{AD}{BC + AD} = \frac{m}{m + 1}.$$

Ответ: сечение будет ромбом при $\lambda = \frac{m}{m + 1}$.

2.2 Примеры решения некоторых задач



Задача 1. Определить боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота, площадь основания и площадь диагонального сечения соответственно равны h , Q , и M .

Решение. Имеем $S_{\text{бок}} = 2(a + b) \cdot h$, где a , b – стороны основания параллельного параллелепипеда.

По условию, $ab = Q$ и $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = M$.

Отсюда
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{M^2}{h^2}; \\ 2ab = 2Q. \end{cases} \quad (a + b)^2 = \frac{M^2}{h^2} + 2Q. \quad a + b = \sqrt{\frac{M^2}{h^2} + 2Q}.$$

Теперь находим
$$S_{\text{бок}} = 2\sqrt{\frac{M^2}{h^2} + 2Q} \cdot h = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}.$

Задача 2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность ее равна 144 см^2 . Найти сторону основания и боковое ребро.

Решение. Пусть $AB = a$, $AA_1 = h$. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} a^2 + 2ah = 72, & \begin{cases} 2a^2 + 4ah = 144, \\ 2a^2 + h^2 = 81. \end{cases} \end{cases}$$

Решим систему: $4ah - h^2 = 63, \quad a = \frac{63 + h^2}{4h}.$

Подставим a в 1-ое уравнение

$$\left(\frac{63 + h^2}{4h} \right)^2 + 2 \frac{63 + h^2}{4h} h = 72, \quad h_1 = 3 \quad \text{или} \quad h_2 = 7.$$

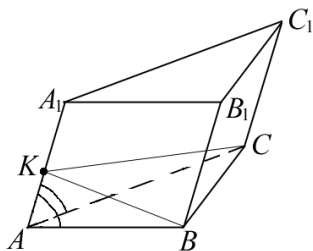
Определяем $a_1 = 6 \text{ см}, \quad a_2 = 4 \text{ см}.$

Ответ. 1. $A = 6 \text{ см}, \quad h = 3 \text{ см};$
2. $a = 4 \text{ см}; \quad h = 7 \text{ см}.$

Задача 3. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной a . Боковое ребро равно b . Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы равные α . Найти боковую поверхность призмы.

Решение. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной a . Боковое ребро b .

Пусть угол $\angle A_1AB = \angle A_1AC = \alpha$. Построим перпендикулярное сечение призмы. Для этого проведем в плоскости AA_1B_1B прямую $BK \perp AA_1$ и соединим K и C . Докажем, что $\triangle BKC$ – перпендикулярное сечение призмы.



Имеем $\triangle AKC = \triangle AKB$ ($AC = AB$, AK – общая и $\angle KAC = \angle KAB = \alpha$).

Следовательно, $\angle AKC = \angle AKB = 90^\circ$, т.е. $KC \perp AA_1$, кроме того, $KC = KB$.

$AA_1 \perp KB$, значит AA_1 перпендикулярна $\triangle ABC$, т.е. BKC – перпендикулярное сечение.

Вычислим периметр треугольника BKC :

$$P_{\Delta} = BC + KB + KC = BC + 2BK \cdot BC = a, \quad KB = a \cdot \sin \alpha,$$

$$P_{\Delta} = a + 2a \cdot \sin \alpha =$$

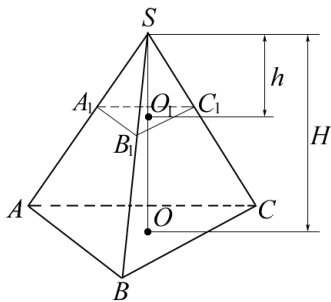
$$= 2a \left(\frac{1}{2} + \sin \alpha \right) = 2a \left(\sin 30^\circ + \sin \alpha \right) = 4a \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Тогда

$$S_{\text{бок}} = 4ab \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{бок}} = 4ab \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 4. В каком отношении разделится высота пирамиды, считая от вершины, параллельным сечением, площадь которого в 3 раза меньше площади основания?



Решение.

$$S_{\text{осн}} : S_{\text{сеч}} = \frac{H^2}{h^2}.$$

По условию $\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = 3$. Следовательно, $\frac{H^2}{h^2} = 3$;

$$\frac{H}{h} = \sqrt{3}.$$

Составим производную пропорцию

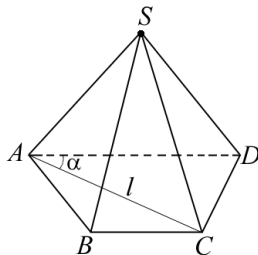
$$\frac{H-h}{h} = \frac{\sqrt{3}-1}{1}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{O_1O}{SO_1} = \sqrt{3} - 1, \quad \text{или} \quad \frac{SO_1}{O_1O} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Задача 5. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, диагональ которой l составляет с большим основанием угол α . Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.



Имеем

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \varphi}.$$

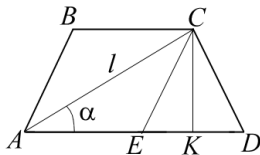
Найдем площадь трапеции. Проведем $CE \parallel AB$ и опустим высоту CK . Получился треугольник CED – равнобедренный, $EK = KD$;

$$AD + BC = AE + EK + KD + BC = 2AK.$$

$$\text{Отсюда } (AD + BC)/2 = AKS_{\text{тр}} = AK \cdot CK.$$

Из треугольника ACK :

$$AK = l \cdot \cos \alpha; \quad CK = l \cdot \sin \alpha.$$



$$S_{ABCD} = l^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha. S_{\text{пол}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \varphi} + S_{ABCD} = S_{ABCD} \left(\frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) =$$

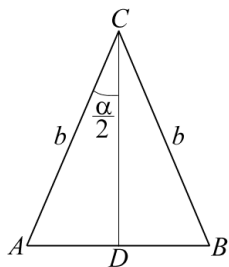
$$= \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha \frac{2 \cos^2(\varphi/2)}{\cos \varphi}.$$

$$S_{\text{пол}} = \frac{l^2 \sin 2\alpha \cos^2(\varphi/2)}{\cos \varphi}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{пол}} = \frac{l^2 \sin 2\alpha \cos^2(\varphi/2)}{\cos \varphi}.$$

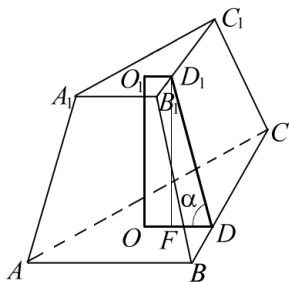
Задача 6. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α . Найти полную поверхность, если боковое ребро равно b .

Решение. На рисунке изображена боковая грань пирамиды.



$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \cdot 3 = \frac{3}{2} b^2 \sin \alpha; \quad S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$\text{где } a = AB = 2AD = 2b \cdot \sin(\alpha/2).$$



$$S_{\text{очн}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2b \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \sqrt{3} b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{пол}} &= \frac{3}{2} b^2 \sin \alpha + \sqrt{3} b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} b^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \sqrt{3} b^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \sqrt{3} b^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2b^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2b^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Задача 7. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды соответственно равны a и b , причем $a > b$. Боковая грань образует с большим основанием угол α . Найти полную поверхность пирамиды.

Решение. Из треугольника D_1FD имеем $DD_1 = DF/\cos\alpha$, но

$$DF = OD - O_1D_1 = \frac{BC}{2\sqrt{3}} - \frac{B_1C_1}{2\sqrt{3}} = \frac{a-b}{2\sqrt{3}},$$

поэтому

$$D_1D = \frac{a-b}{2\sqrt{3} \cos \alpha}.$$

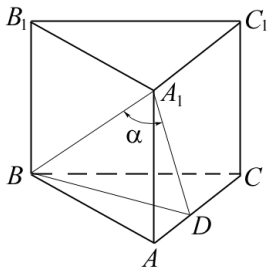
$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_B + S_H = 3 \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2\sqrt{3} \cos \alpha} + (a^2 + b^2) \frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4 \cos \alpha} + \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4 \cos \alpha} + \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{3}}{4}.$

Задача 8. В правильной треугольной призме сторона основания равна a .

Найти объем призмы, если диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол α .



Решение. По условию $AB = BC = AC = a$, AA_1A перпендикулярна плоскости ABC , A_1B образует с плоскостью AA_1C_1C угол α .

Объем призмы

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H; \quad S_{\text{осн}} = S_{\text{ABC}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Найдем H . Проведем $BD \perp AC$ и соединим D с A_1 . Так как AA_1 перпендикулярна плоскости ABC , то BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1C .

Следовательно, A_1D – проекция наклонной BA_1 на плоскость AA_1C_1C , поэтому $\angle BA_1D = \alpha$.

В треугольнике BA_1D угол $BDA_1 = 90^\circ$, $A_1D = BD \cdot \text{ctg} \alpha$.

$$\text{Далее имеем } BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad A_1D = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ctg} \alpha.$$

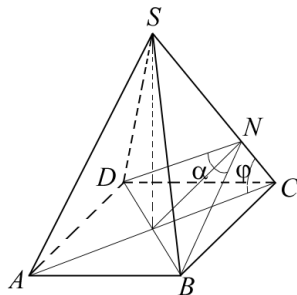
Из треугольника AA_1D , в котором $AD = a/2$, угол $A_1AD = 90^\circ$, следует, что

$$\begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2 \text{ctg}^2 \alpha - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3 \text{ctg}^2 \alpha - 1} = \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{3 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) - 1} = \frac{a}{2 \sin \alpha} \sqrt{3 - 3 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2 \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\cos(30^\circ + \alpha) \cos(30^\circ - \alpha)}.$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \sin \alpha} \sqrt{\cos(30^\circ + \alpha) \cos(30^\circ - \alpha)}.$$

Задача 9. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой длина стороны основания равна a , а двугранный угол между боковыми гранями равен α .



Решение. Опустим из точки B перпендикуляр BN на сторону SC и точку N соединим с CD .

$BC = CD$, $\angle SCD = \angle SCB$ и NC – общая сторона, то $\triangle BCN = \triangle DCN$ и следовательно, $DN \perp SC$, $\angle BND = \alpha$ является линейным углом между боковыми гранями.

Введем вспомогательный угол $\angle SCO = \varphi$. Из треугольника SOC следует, что $SO = H$,

$$H = OC \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Треугольник ONC – прямоугольный, так как SC – перпендикуляр к плоскости BND

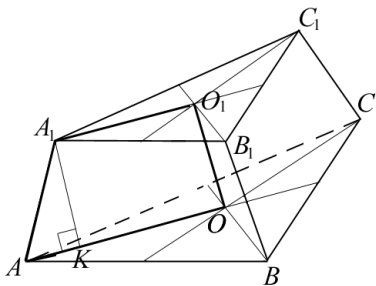
$$\sin \varphi = \frac{ON}{OC} = \frac{ON}{OB} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}} = \\ &= \frac{a\sqrt{2} \operatorname{ctg}(\alpha/2) \sin(\alpha/2)}{2\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \cos^2(\alpha/2)}} = \frac{a\sqrt{2} \cos(\alpha/2)}{2\sqrt{-\cos \alpha}}; \\ V &= S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{a^3 \sqrt{2} \cos(\alpha/2)}{6\sqrt{-\cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Условием разрешимости задачи будет $\cos \alpha < 0$, т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 10. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 см, стороны одного основания – соответственно 27, 29, 52 см, а периметр другого 72 см. Найти объем усеченной пирамиды.



Решение. По условию $H = 10$ см, по формуле Герона находим $Q = 270$. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон, которые в свою очередь, относятся как квадраты периметров, поэтому

$$\frac{Q}{q} = \frac{P^2}{p^2},$$

где P и p – периметры оснований,

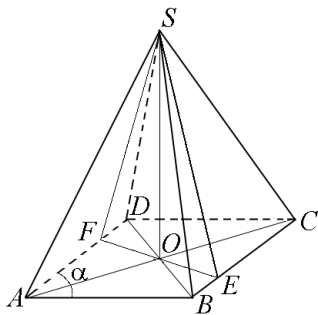
или

$$\frac{270}{q} = \frac{108^2}{72^2}, \quad \text{отсюда} \quad q = \frac{270 \cdot 72^2}{108^2} = 120.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10(270 + \sqrt{270 \cdot 120} + 120) = 1900 \text{ см}^3.$$

Задача 11. В основании четырехугольной пирамиды, объем которого V , лежит ромб со стороной a и острым углом α . Все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Определить двугранный угол между противоположными боковыми гранями.



Решение. Так как все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды проектируется в точку O пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

$$AB = BC = CD = DA = a, \quad \angle DAB = \alpha.$$

Для построения искомого угла проведем через SO плоскость, перпендикулярную граням SAD и SBC , для чего через точку O проведем перпендикуляр FE , и $\angle FSE$ – искомый угол

$$FO = OE \quad \text{и} \quad \angle FSO = \angle FSE/2,$$

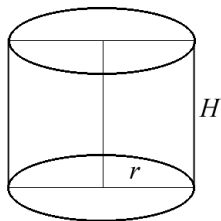
$$\operatorname{tg} \frac{\angle FSE}{2} = \frac{FO}{SO}; \quad V = \frac{1}{3} a^2 \sin \alpha \cdot SO,$$

$$SO = \frac{3V}{a^2 \sin \alpha}, \quad FO = \frac{a}{2} \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle FSE}{2} = \frac{a^3 \sin^2 \alpha}{6V}, \quad \angle FSE = 2 \operatorname{arctg} \frac{a^3 \sin \alpha}{6V}.$$

$$\text{Ответ: } 2 \operatorname{arctg} \frac{a^3 \sin \alpha}{6V}.$$

3. Фигуры вращения



Цилиндр. Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

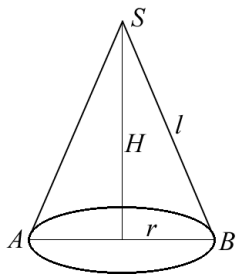
Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$V = \pi r^2 H.$$

Площадь боковой поверхности вычисляется $S_{\text{бок}} = 2\pi r H$.

$$S_{\text{пол}} = 2\pi r^2 + 2\pi r H,$$

где r – радиус основания конуса; H – высота конуса.



Конус. Прямым круговым конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

$SO = H$ – ось вращения; $SB = l$ – образующая конуса.

Объем конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $S = \pi r l$.

$$S_{\text{пол}} = \pi r l + \pi r^2.$$

Усеченный конус. Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется усеченным конусом.

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2),$$

где H – высота конуса; R – радиус нижнего основания; r – радиус верхнего основания.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + R)l.$$

Шар. Множество всех точек пространства, находящихся на данном положительном расстоянии R от данной точки пространства O , называется сферой. O – центр сферы.

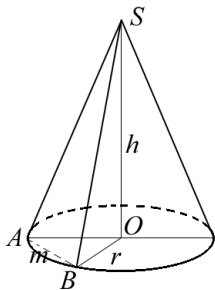
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3; \quad S_{\text{шара}} = 4\pi r^2.$$

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называют большим кругом.

Шаровой сегмент. (R – радиус шара; h – высота сегмента; S – площадь сферической поверхности сегмента; V – объем).

$$S = 2\pi R h; \quad V = \pi h^2(R - (1/3)h).$$

Задача 12. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.



Решение. Пусть $AO = r$; $SO = h$; V – объем конуса; V_1 и V_2 – объемы его частей.

Найдем V_1 как разность между объемами. Части конуса, основанием которой является сектор AOB , и пирамиды, в основании которой лежит треугольник AOB . Согласно условию, $AB = r$, т.е. AB – стороны вписанного правильного шестиугольника и, значит,

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} h = \frac{1}{3} S_1 h,$$

где S_1 – площадь сегмента AmB . Тогда $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3} S_2 h$, где $S_2 = \pi r^2 - S_1$.

Таким образом

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2};$$

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}; \quad S_2 = \pi r^2 - \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{r^2(10\pi + 3\sqrt{3})}{12};$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$$

Задача 13. Радиус основания конуса равен R , а угол развертки его боковой поверхности равен 90° . Определить объем конуса.

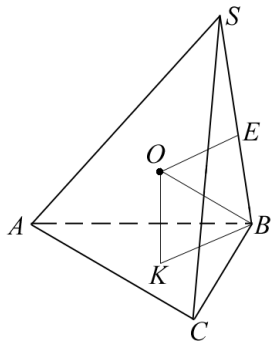
Решение. Пусть l – образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то $2\pi R = \frac{2\pi l}{4}$ (по условию, развертка представляет собой четверть круга), откуда $l = 4R$. Найдем высоту конуса.

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{16R^2 - R^2} = R\sqrt{15}.$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{15} = \frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}.$$

Задача 14. Основание пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a . Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно b . Найти радиус шара, описанного около пирамиды.



Решение. Пусть O – центр шара, описанного около пирамиды $ABCS$. Тогда $OA = OB = OC = OS$. Опустим перпендикуляр OK на плоскость ABC и проведем $OE \perp SB$. Поскольку O равноудалена от вершины треугольника ABC , точка K является центром треугольника.

$$BK = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$(h_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BK = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}).$$

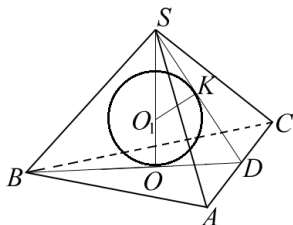
Далее, так как

$$OB = OS, \text{ то } EB = ES = b/2.$$

Следовательно, $OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}$.

Задача 15. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a .



Решение. Для отыскания радиуса шара проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему. Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Тогда все ребра пирамиды равны a , то

$$SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из треугольника SOD следует

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Обозначим радиус шара через r , тогда $SO_1 = SO - r$. В треугольнике SKO_1 имеем

$$O_1K^2 = SO_1^2 - SK^2, \quad \text{или} \quad r^2 = (SO - r)^2 - \frac{a^2}{3},$$

Откуда

$$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2a\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^3}{3}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

$$S_{шара} = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{6}$.

Задача 16. Радиус шара, вписанного в усеченный конус, равен R , а радиус шара, описанного около этого усеченного конуса, равен $R\sqrt{30}$. Найти угол между образующей усеченного конуса и его основанием.

Решение. Сделаем чертеж к этой задаче.

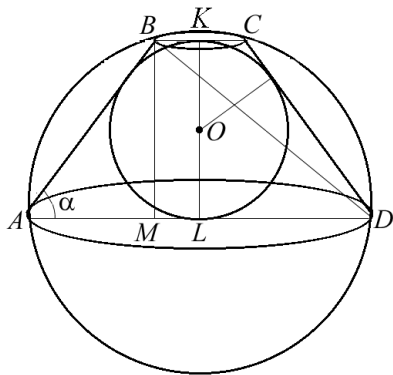
Пусть $\angle BAD = \alpha$.

Проведем $BM = KL = 2R$,

$$MD = \frac{AD + BC}{2}.$$

Так как в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то $AD + BC = AB + CD = 2AB$.

$$MD = \frac{AD + BC}{2} = \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{2} = AB.$$



Но $AB = \frac{2R}{\sin \alpha}$ (из треугольника AMB), поэтому $MD = \frac{2R}{\sin \alpha}$.

Из треугольника BMD следует, что

$$BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{4R^2 + \frac{4R^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{2R}{\sin \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}.$$

По теореме синусов $BD = 2R\sqrt{30} \sin \alpha$, поэтому

$$\frac{2R}{\sin \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} = 2R\sqrt{30} \sin \alpha, \quad 1 + \sin^2 \alpha = 30\sin^4 \alpha.$$

Обозначим $\sin^2 \alpha = y, y > 0, \quad y^2 - 30y + 1 = 0, \quad y = 0,2$.

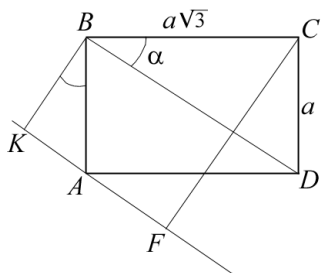
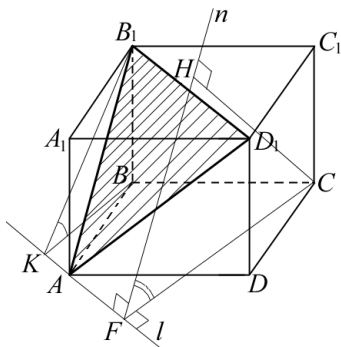
$$\sin^2 \alpha = 0,2; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Получим, $\cos 2\alpha = 0,6$. Следовательно, $\alpha = (1/2)\arccos 0,6$.

Ответ: $\alpha = (1/2)\arccos 0,6$.

Замечание. При вычислении расстояния от точки до плоскости необходимо выполнить следующее:

1. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости;
2. Искомое расстояние до плоскости есть перпендикуляр, опущенный из данной точки на линию пересечения плоскостей (данной и ей перпендикулярной).



Задача 17. В прямоугольном параллелепипеде a и $a\sqrt{3}$ – стороны основания; h – высота. Вычислить расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1 .

Решение. Расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1 есть перпендикуляр на эту плоскость, опущенный из этой точки. Построим этот перпендикуляр. Проведем $Al \parallel B_1D_1$. Это будет линия пересечения AB_1D_1 и $ABCD$ на основании теоремы о пересечении двух параллельных плоскостей третьей. Из точки C опустим на Al перпендикуляр CF . Из F по плоскости AB_1D_1 восстанавливаем перпендикуляр Fn .

Тогда $nFC \perp AB_1D_1$ и Fn – линия пересечения этих плоскостей. Значит, расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1 есть перпендикуляр к Fn , т.е. CH .

Из треугольника HFC следует $CH = FC \cdot \sin \angle HFC$.

Определим этот угол. Для этого построим плоскость B_1BK параллельную HCF , тогда $\angle HFC = \angle B_1KB$.

$$\sin \angle B_1KB = \frac{B_1B}{KB_1}, \quad KB = \frac{FC}{2}, \quad B_1B = h.$$

В треугольнике BCD (рис. 28, б) $\frac{CD}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

следовательно $\alpha = 30^\circ$. $\angle KBA = 30^\circ$, $KB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FC = a\sqrt{3}$.

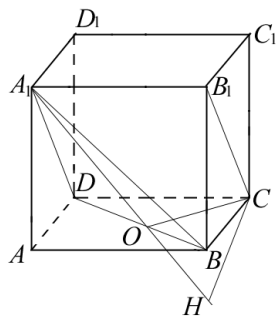
$$\sin \angle B_1KB = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

$$CH = a\sqrt{3} \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

$$\text{Ответ: } a\sqrt{3} \frac{a\sqrt{3} \cdot 2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

Задача 18. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d . Определить полную поверхность куба.

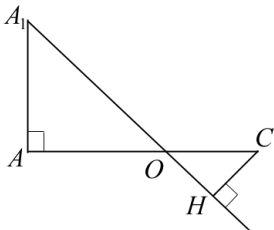
Решение. Пусть расстояние между непересекающимися диагоналями A_1B и B_1C равно d . Построим отрезок d . Перенесем B_1C параллельно себе до пересечения с A_1BD . Для этого из C опустим перпендикуляр на BD . Из точки O восстановим перпендикуляр к BD по плоскости A_1BD . Линия A_1O – это линия пересечения перпендикулярных плоскостей A_1BD и COA_1 . Тогда перпендикуляр CH и есть расстояние от C до плоскости A_1BD и $CH = d$.



Выразим ребро куба через d . Пусть ребро куба – a . Тогда $AC = a\sqrt{2}$.

Из треугольника OCH : $OC = \frac{HC}{\sin \angle O}$.

Из треугольника A_1OA :



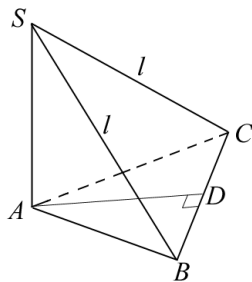
$$\sin \angle O = \frac{A_1A}{A_1O} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad a = d\sqrt{3}.$$

Полная поверхность куба $6a^2 = 6d^2 \cdot 3 = 18d^2$.

Ответ: $18d^2$.

Задача 19. Основание пирамиды – правильный треугольник, одно из боковых ребер совпадает с высотой пирамиды, длины двух других боковых ребер равны l . При какой длине высоты пирамиды ее объем будет наибольшим? Найти этот объем.



Решение. $SABC$ – пирамида. По условию $SA \perp ABC$,

$$SC = SB = l. V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot AS.$$

Пусть $AS = x$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AD.$$

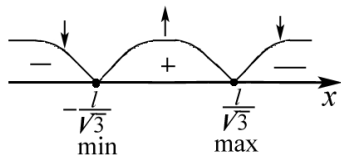
Из треугольника ASB : $AB = \sqrt{SB^2 - AS^2} = \sqrt{l^2 - x^2}$;

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{l^2 - x^2}. \quad V = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{l^2 x - x^3}.$$

Для определения значений x , при котором объем пирамиды принимает наибольшее значение, найдем производную функции $V(x)$ и ее критические точки:

$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} (l^2 x - x^3)' = \frac{\sqrt{3}}{12} (l^2 - 3x); \quad l^2 - 3x = 0;$$

$$x = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

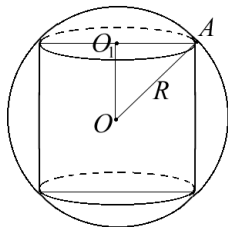


$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} - \text{точка максимума } V(x).$$

$$V = V\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right) \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l^3}{18}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{l}{\sqrt{3}}; \quad \frac{l^3}{18}.$$

Задача 20. Дан шар с радиусом R . Вычислить радиус основания и образующую вписанного в него цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.



Решение. Обозначим радиус основания цилиндра x , а длину образующей l , $x \in (0, R)$; $l \in (0, R)$.

Выразим площадь боковой поверхности цилиндра через функцию радиуса основания x .

Из треугольника OO_1A имеем

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - x^2; \quad l = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Подставим l в формулу площади боковой поверхности цилиндра, получим

$$S_{\text{бок}} = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Для определения значений x , при которых площадь боковой поверхности цилиндра принимает наибольшее значение, найдем производную

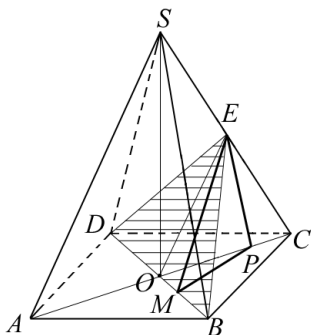
$$S'(x) = \left(4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\right)' = 4\pi \left(\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = 0,$$

$$R^2 - x^2 - x^2 = 0, \quad x^2 = \frac{R^2}{2}, \quad x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ — это точка макс функции.}$$

$$l = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{2}, \quad \text{т.е. } x = \frac{l}{2}.$$

Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2}}$; $R\sqrt{2}$.

Задача 21. Основанием пирамиды служит прямоугольник со стороной a и $2a$. Все боковые ребра равны $10\sqrt{5}$. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведено сечение. Найти значение a , при котором площадь сечения является наибольшей.



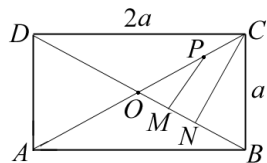
Решение. 1. Определим условия существования пирамиды. Из треугольника DBC имеем

$$DB \leq DS + SB.$$

Так как $DO = OB$, $DS = SB$, то $OD \leq DS$. Следовательно, для существования пирамиды, необходимо, чтобы ее боковое ребро было не меньше половины длины диагонали основания, т.е.

$$10\sqrt{5} \geq AO, \quad \text{где } AO = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad \text{тогда } a \leq 20.$$

2. Для построения сечения по условию задачи проведем $OE \parallel AS$ и треугольник DEB – искомое сечение, причем $SE = EC$. Не следует считать OE в треугольнике BDE высотой на BD ; OC не перпендикуляр BD .



Построим эту высоту, проведя перпендикуляр EP и PM . Тогда $EM \perp BD$,

$$S_{DEB} = \frac{1}{2} BD \cdot EM; \quad BD = a\sqrt{5}.$$

Вычислим $EM = \sqrt{EP^2 + PM^2}$. Проведем вспомогательную линию $CN \perp BD$. Из треугольника OCN видно, что

$$PM = \frac{CN}{2}.$$

Из треугольника BDC :

$$NC = \frac{BC \cdot CB}{BD} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; \quad PM = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Из треугольника SOC : $EP = \frac{SO}{2}$.

Так как $SO = \sqrt{100 \cdot 5 - \frac{5a^2}{4}}$, то $EP = \frac{1}{2} \sqrt{500 - \frac{5a^2}{4}}$.

Из треугольника EMP находим $EM = \sqrt{\frac{1}{4} \left(500 - \frac{5a^2}{4} \right) + \frac{a^2}{5}}$.

Искомая площадь

$$S_{DEB} = \frac{1}{2} a \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{500}{4} + \frac{a^2}{5} - \frac{5a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9a^2}{80}}.$$

$$S'(a) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9}{80} a^2} + \frac{-a \cdot \frac{18}{80} a}{2\sqrt{\frac{500}{4} - \frac{9}{80} a^2}} \right] = 0;$$

$$\frac{500}{4} - \frac{9}{80} a^2 - \frac{9}{80} a^2 = 0; \quad \frac{500}{4} - \frac{18}{80} a^2 = 0; \quad a = \frac{100}{3\sqrt{2}}.$$

При $a \in \left(0; \frac{100}{3\sqrt{2}}\right)$ функция $S(a)$ возрастает.

Тогда и $a \in (0, 20) \subset \left(0, \frac{100}{3\sqrt{2}}\right)$ функция $S(a)$ возрастает и достигает наибольшего значения при $a = 20$.

$$S_{\max}(a) = S(20) = 200 \text{ кв. ед.}$$

Ответ: 20.

3.1 Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.

Ответ: 4.

2. Ребро куба равно $10/\sqrt{2}$. Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до пересекающего его ребра. *Ответ:* 5.

3. Площадь сечения куба плоскостью проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

Ответ: 2.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол в 45° . Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Определите его объем.

Ответ: 60.

5. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 и расстояния между ними 26, 25, 17 линейных единиц. Определите объем призмы.

Ответ: 3060.

6. В правильной треугольной пирамиде вычислите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если отношения бокового ребра к стороне основания равно 2:3. Ответ запишите в градусах.

Ответ: 30° .

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 5 и 5. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью ее основания равные двугранные углы, содержащие по 45° . Определите объем этой пирамиды.
8. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2 ; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Определите боковую поверхность этой пирамиды. *Ответ: 768.*
9. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом в 30° , боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Определите объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $4\sqrt{3}$.
Ответ: 1536.
10. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 12, составляет с высотой пирамиды угол в 30° . Найдите объем пирамиды.
Ответ: 324.
11. Определите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а стороны оснований соответственно равны 14 и 10. *Ответ: 872.*
12. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 см, стороны одного основания соответственно равны 27, 29, 52 см, а периметр другого равен 72 см. Найдите объем усеченной пирамиды.
Ответ: 1900.

13. Прямой круговой конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен $3\sqrt[4]{5}$. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара. *Ответ:* 45π .

14. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса 120° , образующая конуса равна 6. Найдите радиус шара описанного около этого конуса.

Ответ: 6.

15. Боковая поверхность конуса в 3 раза больше площади основания. Найдите угол его развертки. *Ответ:* 120° .

16. Площадь осевого сечения цилиндра равна $16/\pi$ дм². Найдите площадь его боковой поверхности. *Ответ:* 16.

17. Ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и острым углом 60° вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярна его стороне. Найдите объем полученного тела вращения.

Ответ: 169,56.

18. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Площадь прямоугольника равна 17, а длина окружности, описанной точкой пересечения его диагонали равна 5. Найдите объем этого цилиндра.

Ответ: 85.

19. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 1:1. Площадь основания больше площади сечения на 381. Найдите площадь основания. *Ответ:* 508.

20. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к плоскости основания проведена плоскость. Определите площадь сечения, если апофема пирамиды равна l , а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α .

$$\text{Ответ: } \frac{l^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

21. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D находятся на плоскости α , а B и C – вне ее. Сторона $AD = 10$ см, $AB = 15$ см, проекции диагоналей AC и BD на плоскость α соответственно равны: $AC_1 = 13,5$ и $B_1D = 10,5$. Найдите диагонали.
Ответ: 19; 17.

22. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислите боковую поверхность образовавшейся пирамиды, если ребро куба равно 7.
Ответ: 73,5.

23. Стороны основания правильной четырехугольной призмы равна 15, а высота 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны снования до не пересекающей ее диагонали призмы.

Ответ: 12.

24. В конусе даны радиус основания R и высота H . В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани квадраты. Определите ребро этой призмы.

Ответ: $\frac{HR\sqrt{3}}{H - R\sqrt{3}}$.

25. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 29$ см, $AD = 36$ см, $BC = 25$ см и боковое ребро равно 48 см, Найдите площадь сечения $AB_1 C_1 D_1$.

Ответ: 1872 см².

26. Основание пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания: $AB = 3$ см; $SA = 4$ см. Докажите, что в пирамиду можно вписать сферу и найдите радиус этой сферы.

27. В шар вписан конус, объем которого равен 96π см³. Вычислите: 1. Площадь поверхности конуса; 2. Объем шарового сегмента, отсекаемого плоскостью основания конуса.

Ответ: 96 см²; $96 \frac{3}{16} \pi$ см³.

28. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a . Одно из боковых ребер пирамиды также равно a , а два других равны b . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{4b^2 - a^2}}{2\sqrt{4a^2 b^2 - a^4 - b^4}}$.

29. В правильной треугольной призме расстояние от одной из сторон основания до наиболее удаленной от этой стороны вершины призмы равно d . При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим? Найдите этот объем.

$$\text{Ответ: } \frac{d}{\sqrt{3}}; \frac{2d^2}{9}.$$

30. Длина диагонали боковой грани правильной шестиугольной призмы равна d . Какова должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите этот объем. *Ответ:* $d/\sqrt{3}; d^2$.

31. В правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписан цилиндр. При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Найдите этот объем.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2 h}{27}; \frac{h}{3}.$$

32. Сфера радиусом r вписана в конус. При какой высоте конуса площадь его боковой поверхности будет наименьшей? Найдите эту площадь. *Ответ:* $\pi r^2(3 + 2\sqrt{2})$ при высоте $r(2 + \sqrt{2})$.

33. В правильной треугольной пирамиде, вписанной в сферу, расстояние от центра сферы до боковой грани равно d , а боковое ребро в два раза больше высоты основания. Между сферой и пирамидой расположен цилиндр, одно из оснований

которого лежит в плоскости боковой грани, а окружность другого основания принадлежит сфере. Какой наибольший объем может иметь этот цилиндр?

$$\text{Ответ: } \pi \frac{1408}{27} d^3.$$

4. Тесты

1. Определите величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.

1. 60° ; 2. 30° ; 3. 45° ; 4. 90° ;

5. правильный ответ не указан.

Выберите правильный ответ.

2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки B , D , и C_1 и плоскостью основания.

1. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; 2. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$; 3. 45° ; 4. $\arctg \sqrt{2}$.

5. правильный ответ не указан.

3. Площадь диагонального сечения куба равна $8\sqrt{2}$ см³. Найдите площадь поверхности куба.

1. $36\sqrt{2}$; 2. $24\sqrt{2}$; 3. 36; 4. 48;

5. правильный ответ не указан.

4. Определите диагональ прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 2, 3, 6. Укажите правильный ответ.

1. 7; 2. $\sqrt{7}$; 3. $\sqrt{13}$; 4. 13;

5. правильный ответ не указан.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площадь основания равна 16 см^2 . Найдите расстояние между прямыми AA_1 и $B_1 D$.

1. $\sqrt{2}$; 2. $2\sqrt{2}$; 3. 4; 4. 16;

5. правильный ответ не указан.

6. Определите радиус основания цилиндра, полная поверхность которого равна $30\pi \text{ дм}^2$, а площадь осевого сечения 12 дм^2 . Укажите правильный ответ.

1. 3; 2. 4; 3. $\sqrt{3}$; 4. 5;

5. правильный ответ не указан.

7. Если ребро правильного октаэдра равно $15\sqrt{6}$, то объем октаэдра равен:

1. $27\sqrt{2}$; 2. $4,5\sqrt{3}$; 3. $13,5\sqrt{3}$; 4. $9\sqrt{3}$.

5. правильный ответ не указан.

8. Если сфера радиуса 1 касается всех граней правильной шестиугольной призмы, то длина ребра основания призмы равна

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 4. $2\sqrt{5}$.

5. правильный ответ не указан.

9. Высота цилиндра равна диаметру основания. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 104, то площадь основания цилиндра равна:

1. 23; 2. $23\sqrt{2}$; 3. 26;

4. Правильный ответ не указан.

10. Диагональное сечение правильной шестиугольной призмы делит ее на две неравные части. Отношение боковых поверхностей этих частей равно:

1. $\frac{5+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; 2. $\frac{4+\sqrt{3}}{3}$; 3. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$; 4. $\frac{5+2\sqrt{3}}{13}$.

5. правильный ответ не указан.

11. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

1. $33\frac{1}{3}\%$; 2. 33% ; 3. 67% ; 4. $66\frac{2}{3}\%$.

5. правильный ответ не указан.

12. Двугранный угол равен 45° . На одной грани дана точка на расстоянии a от другой. Расстояние этой точки от ребра равно:

1. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2. a ; 3. $\sqrt{2}$; 4. $a\sqrt{2}$.

5. правильный ответ не указан.

13. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, причем один из его углов равен β , а его сторона m . Плоскости двух боковых граней перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с основанием угол α . Высота пирамиды равна:

1. $\frac{m \sin \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$; 2. $m \sin \beta \operatorname{tg} \alpha$; 3. $m \operatorname{tg} \alpha$; 4. $\frac{m}{\sin \beta \operatorname{tg} \alpha}$.

5. правильный ответ не указан.

14. В основании наклонной призмы $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$ лежит трапеция $CDEF$, причем $DE \parallel CF$ и $CF = 4$ см; $EF = 13$ см; $CD = DE = 20$ см. Плоскость диагонального сечения, проходящего через точку C перпендикулярна основанию и равна $30\sqrt{20}$ см. Найдите объем призмы.

1. $640\sqrt{6}$; 2. 980; 3. $720\sqrt{3}$; 4. $0,925\sqrt{2}$.

15. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного возле куба, больше площади поверхности шара вписанного в тот же куб.

1. 3; 2. $\frac{17}{3}$; 3. $\frac{5}{4}$; 4. Правильного ответа нет.

16. Около прямого кругового конуса описан шар. Угол при вершине осевого сечения этого конуса равен 60° . Во сколько раз объем шара больше объема конуса?

1. $32/9$; 2. $32/7$; 3. $31/3$.

17. В шар вписан равносторонний конус. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

1. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 2. $32/9$; 3. $29/3$; 4. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.