

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**Ю.И. ГАЛАНОВ, Е.Н. НЕКРЯЧ, В.И. РОЖКОВА**

## **ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

Электронное пособие для абитуриентов

Издательство  
Томского политехнического университета  
2011

## Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений, решение которых записывается в виде формул, содержащих бесчисленное множество решений. В связи с тем, что по условию задачи можно записать единственный числовой ответ, абитуриенты часто упускают запись решения в общем виде – это неверно. Нужно полностью записать решение тригонометрического уравнения, описать все множество его решений и только после этого выбрать единственный числовой ответ.

Приведем основные формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

I.  $\sin x = a$ ;  $x$  – любое, при  $|a| > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$ ;

$$\text{при } |a| \leq 1 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z \quad (1)$$

Частные случаи:

1.  $\sin x = 0, \quad x = \pi n, n \in Z$

2.  $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

3.  $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

II.  $\cos x = a$ ;  $x$  – любое, при  $|a| > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$ ;

$$\text{при } |a| \leq 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z \quad (2)$$

Частные случаи:

1.  $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$

2.  $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$

3.  $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$

III.  $\operatorname{tg} x = a; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \quad a - \text{любое} \Rightarrow$

$$x = \operatorname{arctg} x + \pi n, \quad n \in Z \quad (3)$$

Частные случаи:

1.  $\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z$

2.  $\operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

3.  $\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

IV.  $\operatorname{ctg} x = a; \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z, \quad a - \text{любое} \Rightarrow$

$$x = \operatorname{arccotg} x + \pi n, \quad n \in Z \quad (4)$$

Частные случаи:

1.  $\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$

$$2. \operatorname{ctg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$3. \operatorname{ctg} x = -1, \quad x = \frac{3}{4}\pi + \pi n, \quad n \in Z$$

В (1) – (4) решения уравнений выражены через значения обратных тригонометрических функций. Напомним некоторые свойства этих функций:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \quad a - \text{любое}$$

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \quad a \in [-1; 1]$$

$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi, \quad a - \text{любое}$$

Функции  $\arcsin a$ ,  $\operatorname{arctg} a$  являются нечетными; функции  $\arccos a$ ,  $\operatorname{arcctg} a$  не являются четными, не являются нечетными.

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех определяется, в частности, знанием тригонометрических формул и навыками решения задач.

Необходимо помнить следующие моменты:

1. При решении тригонометрических уравнений нельзя сокращать на переменную величину, это может привести к потере корней уравнения. Необходимо каждый множитель исследовать на решение.
2. При решении тригонометрических уравнений необходимо учитывать область допустимых значений (О.Д.З.).
3. При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появляться посторонние корни. Необходима отборка полученных решений, но это сложно, поэтому по возможности нужно обходиться без этой операции.
4. Потеря корней уравнения может произойти и от замены тригонометрических функций через тангенс  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  – универсальная тригонометрическая подстановка. Тогда

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$
$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Функция  $\operatorname{tg}(x/2)$  не существует для  $x/2 = \pi/2 + \pi n$ , т.е.  $x \neq \pi + 2\pi n$ . Но  $\sin x$  и  $\cos x$  определены в этих точках. Поэтому необходимо всегда проверять корни  $x = \pi + 2\pi n$  на решение отдельно.

## Типы тригонометрических уравнений

### 1. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим с помощью основных формул

Пример 1. Найдите в градусах решение уравнения

$$4\cos^2 2x + 16\sin 2x - 11 = 0$$

удовлетворяющее условию  $0^\circ < x < 45^\circ$ .

Решение.  $4(1 - \sin^2 2x) + 16\sin 2x - 11 = 0$

$$4 - 4\sin^2 2x + 16\sin 2x - 11 = 0.$$

Обозначим  $\sin 2x = t$ , тогда  $t \in [-1; 1]$

$$4 - 4t^2 + 16t - 11 = 0$$

$$4t^2 + 16t + 7 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 4 \cdot 7}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 12}{8};$$

$$t_1 = \frac{28}{8} = 3,5 \notin \text{О.Д.З.}; \quad t_2 = \frac{4}{8} = 0,5 \in \text{О.Д.З.}$$

$$\sin 2x = 0,5; \quad 2x = (-1)^n \arcsin(0,5) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{(-1)^n \pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим корни, принадлежащие  $(0; 45^\circ)$

$$n = 0, \quad x = \pi/12 = 15^\circ \in (0; 45^\circ)$$

$$n = 1, \quad x = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \notin (0; 45^\circ)$$

$$n = -1, \quad x = -90^\circ - 15^\circ = -105^\circ \notin (0; 45^\circ)$$

Ответ:  $15^\circ$ .

Пример 2. Найдите наименьшее решение  $x$  уравнения  
 $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$ ,

если  $x \in (0^\circ; 180^\circ)$ .

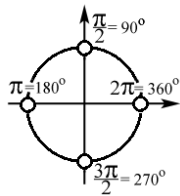
Решение. О.Д.З.  $\begin{cases} x \neq \pi/2 + \pi n, & n \in Z, \\ x \neq \pi k, & k \in Z. \end{cases}$

Заменим  $\operatorname{tg} x = t$ , тогда  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{t}$ .

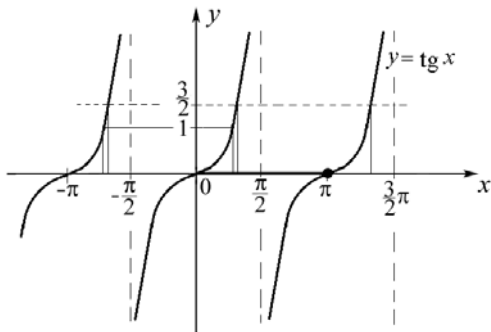
Получим уравнение:  $2t + 3/t = 5$ ,  
 $2t^2 + 3 = 5t$ ,  
 $2t^2 - 5t + 3 = 0$ .

Решая это квадратное уравнение имеем  $t_1 = 1$ ;  $t_2 = 3/2$ .

Итак,  $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = \pi/4 + \pi n, n \in Z$ ;



$$\operatorname{tg} x = 3/2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Затем найдем  $x_1$  и  $x_2$  при  $n = 0$ ,  $n = \pm 1$ ,  $k = 0$ ,  $k = \pm 1$ .

$$n = 0, \quad x_1 = 45^\circ \in (0^\circ; 180^\circ);$$

$$n = 1, \quad x_1 = 225^\circ \notin (0^\circ; 180^\circ);$$

$$n = -1, \quad x_1 = -135^\circ \notin (0^\circ; 180^\circ);$$

$$k = 0, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) \in (0^\circ; 180^\circ);$$

$$k = 1, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) + \pi \notin (0^\circ; 180^\circ);$$

$$k = -1, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) - \pi \notin (0^\circ; 180^\circ).$$

$\operatorname{arctg}(3/2) > \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ , следовательно, из полученных решений наименьшим, принадлежащим данному интервалу, будет  $x = 45^\circ$ .

*Ответ:*  $x = 45^\circ$ .



### Примеры для самостоятельного решения

1.  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0;$

*Ответ:*  $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

2.  $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0;$

*Ответ:*  $x = \pi n, n \in Z.$

3.  $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x;$

*Ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

4.  $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x;$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

5.  $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0;$

*Ответ:*  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$

6. Найдите наименьшее решение  $x$  в градусах, удовлетворяющее заданному условию  $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0, x \in (-90^\circ; 270^\circ).$

*Ответ:*  $-60^\circ.$

7.  $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2};$

$$\text{Ответ: } x \in \left[ \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right] \cup \left[ \frac{2}{3}\pi + \pi n; \frac{5}{6}\pi + \pi n \right], n \in Z.$$

$$8. 6 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x; \quad \text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$9. \operatorname{tg} x - \sin^2 5x = \cos^2 5x, \quad x \in [0; \pi]; \quad \text{Ответ: } 45^\circ.$$

$$10. \operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2, \quad x \in (90^\circ; 180^\circ); \quad \text{Ответ: } 150^\circ.$$

$$11. \sqrt{\sin x} = \sin x, \quad x \in (-45^\circ; 45^\circ); \quad \text{Ответ: } 0^\circ.$$

$$12. 1 + \cos x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad x \in (0^\circ; 90^\circ); \quad \text{Ответ: } 60^\circ.$$

$$13. 5 \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{3} + 1 = -2, \quad x \in [-180^\circ; 0^\circ]; \quad \text{Ответ: } -180^\circ.$$

$$14. 3 \cos^2 x - 10 \cos x + 3 = 0; \quad \text{Ответ: } \pm \arccos(1/3) + 2\pi n, n \in Z.$$

**Уравнения, приводящиеся к виду:  $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0$**

Решение таких уравнений основано на следующем положении: если левая часть уравнения является произведением нескольких сомножителей, а правая часть равна 0, то корнями такого уравнения служат те и только те значения переменной, при которых хотя бы один из сомножителей обращается в 0, но ни один из остальных не теряет числового смысла.

*Пример 1.*  $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x$ .

*Решение.* О.Д.З.  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$ .

Сгруппируем члены уравнения и преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x) - (1 + \sin x) &= 0, \\(1 + \sin x) \operatorname{tg} x - (1 + \sin x) &= 0, \\(1 + \sin x)(\operatorname{tg} x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Получившееся уравнение равносильно исходному. Если  $x$  – решение этого уравнения, то  $x$  является и решением одного из уравнений:

$$1 + \sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad x_1 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \quad x_2 \in \text{О.Д.З.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$$

*Пример 2.*  $\sin 4x = \cos (180^\circ - 2x)$ . Указать  $x \in [-30^\circ; 0^\circ]$ .

*Решение.* По формуле приведения  $\cos(180^\circ - 2x) = -\cos 2x$ . Тогда

$$\sin 4x = -\cos 2x,$$

$$2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x (2\sin 2x + 1) = 0,$$

$$\cos 2x = 0, \quad \sin 2x = -1/2.$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2x_2 = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_2 = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n = 0, x_1 = 45^\circ \notin [-30^\circ; 0^\circ]; \quad k = 0, x_2 = -15^\circ \in [-30^\circ; 0^\circ];$$

$$n = 1, x_1 = 135^\circ \notin [-30^\circ; 0^\circ]; \quad k = 1, x_2 = 105^\circ \notin [-30^\circ; 0^\circ];$$

$$n = -1, x_1 = -45^\circ \notin [-30^\circ; 0^\circ]; \quad k = -1, x_2 = -75^\circ \notin [-30^\circ; 0^\circ].$$

В промежутке  $[-30^\circ; 0^\circ]$  имеется лишь один корень исходного уравнения.

*Ответ:*  $-15^\circ$ .

*Пример 3.* Решить уравнение:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$ .

*Решение.* Преобразуем левую часть уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x).$$

Правую часть разложим в произведение как сумму кубов:

$$\begin{aligned}\sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \\ &= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x).\end{aligned}$$

Теперь уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sin x \cos x\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\sin x + \cos x = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sin x \cos x = 0.$$

$$\sin x = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 2\sin x \cos x = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\sin 2x = 2 - \sqrt{2}, \quad \text{т.к. } 2 - \sqrt{2} < 1, \quad \text{то}$$

$$2x_2 = (-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \pi k, k \in Z,$$

$$x_2 = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} k, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$x_2 = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} k, k \in Z.$$

Примеры для самостоятельного решения

1.  $\sin 2x = \cos x$ ;

$$\text{Ответ: } x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

2.  $2\cos x \cos 2x = \cos x$ ;

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

3. Найдите решение (в градусах) уравнения  $\sin x = \cos 2x$ , удовлетворяющего условию  $-80^\circ < x < 80^\circ$ . *Ответ: 30°.*

**Уравнения, приводящиеся к виду:** 
$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x)} = 0$$

Корнями такого уравнения служат те и только те значения, при которых выполняются следующие условия:

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0 \quad \text{и} \\ g_1(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0, \dots, g_m(x) \neq 0.$$

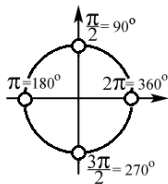
*Пример 1.* Решить уравнение:  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{\cos x - \sin x}{(1/2)\sin 2x}$ . В ответе

укажите число корней уравнения, удовлетворяющих условию  $0^\circ < x < 180^\circ$ .

Решение. О.Д.З.

$$\begin{cases} x \neq \pi n, & n \in Z \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, & k \in Z \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, & n \in Z \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, & k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} l, & l \in Z. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} l, l \in Z.$$



Запишем уравнение в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\cos x - \sin x}{(1/2) \sin 2x}, \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} &= \frac{\cos x - \sin x}{(1/2) \sin 2x}, \\ \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(1/2) 2 \sin x \cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{(1/2) \sin 2x} &= 0, \end{aligned}$$



$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1)}{(1/2)\sin 2x} = 0,$$

$$(1/2)\sin 2x \neq 0; \quad \cos x - \sin x = 0;$$

$$\cos x + \sin x - 1 = 0; \quad \cos x = \sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$$

$$= (\pi/4) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x + \sin x - 1 = 0,$$

$$\sin x = 1 - \cos x,$$

$$\sin(2x/2) = 1 - \cos x,$$

$$2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\sin^2(x/2),$$

$$2\sin(x/2)(\cos(x/2) - \sin(x/2)) = 0.$$

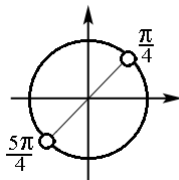
Следовательно,

$$2\sin(x/2) = 0,$$

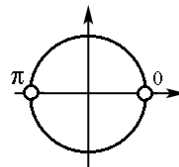
$$\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0.$$

$$\sin(x/2) = 0 \Rightarrow x/2 = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$



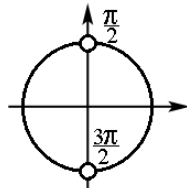
$\Rightarrow x_1$



$$\sin(x/2) = \cos(x/2) \Rightarrow \operatorname{tg}(x/2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x/2 = (\pi/4) + \pi l, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = (\pi/2) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$



$$x_1 \in \text{О.Д.З.}$$

$$x_2 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$x_3 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$x = (\pi/4) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$n = 0, x = 45^\circ \in (0^\circ; 180^\circ),$$

$$n = 1, x = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ \notin (0^\circ; 180^\circ),$$

$$n = -1, x = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ \notin (0^\circ; 180^\circ).$$

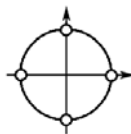
В промежутке  $(0^\circ; 180^\circ)$  находится один корень исходного уравнения.

*Ответ:* 1.

*Пример 2.* Решить уравнение 
$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x}.$$

Решение. О.Д.З.

$$\begin{cases} 1 - \cos 2x \neq 0, \\ 2 \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2x \neq 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \neq 2\pi n, \quad n \in Z, \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq \pi n, \quad n \in Z, \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$



Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\sin 2x}{2 \frac{1 - \cos 2x}{2}} - \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = 0,$$
$$\frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x} - \frac{2 \frac{1 + \cos 2x}{2}}{2 \cos x} = 0,$$
$$\frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x} - \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos x} = 0,$$
$$\frac{2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x}{2 \sin^2 x \cos x} = 0,$$
$$\frac{2 \sin x \cos^2 x (1 - \sin x)}{2 \sin^2 x \cos x} = 0.$$

$$2\sin^2 x \cos x \neq 0, \quad \sin x = 0, \quad \cos^2 x = 0,$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_2 = (\pi/2) + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x_3 = (\pi/2) + 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$x_1 \notin \text{О.Д.З.} \quad x_1 \notin \text{О.Д.З.} \quad x_1 \notin \text{О.Д.З.}$$



$$1 - \sin x = 0.$$

*Ответ:*  $\emptyset$ .

## Однородные уравнения

Уравнение вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + a_3 \sin^{n-3} x \cos^3 x + \dots + a_n \cos^n x = 0,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – действительные числа и сумма показателей степеней при  $\sin x$  и  $\cos x$  в каждом слагаемом равна  $n$ , называется *однородным* относительно  $\sin x, \cos x$ .

Оно решается делением обеих частей уравнения на  $\cos x$  или  $\sin x$ .

В первом случае получается уравнение вида:

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0.$$

Во втором случае –  $a_0 \operatorname{ctg}^n x + a_1 \operatorname{ctg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0$ .

Заменяя  $\operatorname{tg} x = t$  ( $\operatorname{ctg} x = t$ ) получаем алгебраическое уравнение.

*Пример 1.* Решить уравнение:

$$3\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 8\cos^2 x = 0.$$

*Решение.* Разделим исходное уравнение на  $\cos^2 x$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 8 = 0.$$

Обозначим  $\operatorname{tg} x = t$

$$3t^2 - 5t - 8 = 0;$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6};$$

$$\begin{array}{l}
 t_1 = 16/6 = 8/3; \quad t_2 = -1. \\
 \text{tg } x = 2, (6) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \arctg(2, (6)) + \pi n, \quad n \in Z; \\
 \text{tg } x = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = (-\pi/4) + \pi k, \quad k \in Z.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ответ: } x_1 = \arctg(2, (6)) + \pi n, \quad n \in Z; \\
 x_2 = (-\pi/4) + \pi k, \quad k \in Z.
 \end{array}$$

*Пример 2.* Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{2} \sin^2 x \cos^2 x, \quad x \in (-90^\circ; 0^\circ).$$

*Решение.*  $\sin^4 x - \frac{5}{2} \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0;$

$$\text{tg}^4 x - \frac{5}{2} \text{tg}^2 x + 1 = 0.$$

Заменим  $\text{tg } x = t$ , тогда получим  $2t^4 - 5t^2 + 2 = 0$  – получили биквадратное уравнение.

Обозначим  $t^2 = z, \quad z > 0$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}.$$

$$z_1 = 1;$$

$$z_2 = 2,5$$

$$t^2 = 1 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1;$$

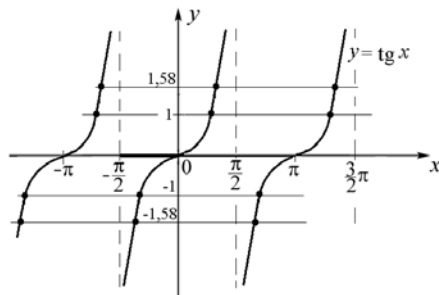
$$t^2 = 5/2 \Rightarrow t_{3,4} = \pm\sqrt{5/2}.$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = (\pi/4) + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x_2 = (-\pi/4) + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z};$$



$$\operatorname{tg} x = \sqrt{5/2} \Rightarrow x_3 = \operatorname{arctg} \sqrt{5/2} + \pi l, l \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{5/2} \Rightarrow x_4 = \operatorname{arctg} -\sqrt{5/2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$x_1 \notin (-90^\circ; 0^\circ) \text{ для всех } n;$$

$$x_2 \in (-90^\circ; 0^\circ) \text{ при } k = 0;$$

$$x_3 \notin (-90^\circ; 0^\circ) \text{ для всех } l;$$

$$x_4 \in (-90^\circ; 0^\circ) \text{ при } m = 0.$$

Ответ:  $x = (-\pi/4); x = \operatorname{arctg} -\sqrt{5/2}.$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $\cos 3x + \sin 3x = 0$ ,      *Ответ:*  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$ .

2.  $\sin 5x + \cos 5x = 0$ ,      *Ответ:*  $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k$ .

4.  $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$ ,

*Ответ:*  $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ ;

$x_2 = \arctg \frac{4}{3} + \pi n, n \in Z$ .

4.  $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$ ,

*Ответ:*  $x_1 = \arctg \frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$ ;

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ .

5.  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0$ ,

*Ответ:*  $x = -\frac{5\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ .



## Уравнения, приводящиеся к однородным

Неоднородное уравнение второго порядка, т.е. уравнение вида:

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d$$

приводится к однородному второго порядка, если вместо

$$d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Некоторые уравнения высшего порядка можно также свести к однородному, используя равенство:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

*Пример 1.*  $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2$ .

*Решение.*  $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ .

После приведения подобных членов получаем

$$\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на  $\cos^2 x$ , переходим к квадратному уравнению относительно  $t = \operatorname{tg} x$ :

$$t^2 - 5t + 6 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 2.$$

Следовательно, решение исходного уравнения сведено к решению простейших тригонометрических уравнений.

$$\operatorname{tg} x = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$x_2 = \arctg 2 + \pi k, k \in Z.$$

*Пример 2.* Решить уравнение  $2\sin^3 x = \cos x$ .

*Решение.* Так как  $\cos x = \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)$  для всех  $x$ , то данное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin^3 x = \cos x \sin^2 x + \cos^3 x,$$

однородному относительно  $\sin x$  и  $\cos x$  степени 3. Деля обе части уравнения на  $\cos^3 x$  и обозначая  $\operatorname{tg} x = t$ , приходим к уравнению

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0.$$

Первый корень ищем подбором:  $t = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$ ;

$t = 1 \Rightarrow 2 - 1 - 1 \equiv 0$ , следовательно  $t_1 = 1$  – корень уравнения.

$$\begin{array}{r|l} \frac{2t^3 - t^2 - 1}{2t^3 - 2t^2} & \frac{t - 1}{2t^2 + t + 1} \\ \hline - & t^2 - 1 \\ - & t^2 - t \\ \hline & t - 1 \\ - & t - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Получаем  $(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0$ .

Поскольку  $2t^2 + t + 1 > 0$  для любого  $t$ , то корень  $t = 1$  является единственным.

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/4 + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi/4 + \pi n, n \in Z.$$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $2\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 4$ ; *Ответ:*  $x = \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \pi n, n \in Z$ ;

2.  $4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + 3\sin^2 \frac{x}{2} = 3$ ;

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \quad x_2 = \pi(2n + 1), n \in Z;$$

3.  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$ ; *Ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ ;

4.  $3 - 7\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x = 0$ ;

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

5.  $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$ ;

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \quad x_2 = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi k, k \in Z.$$

## Тригонометрические уравнения вида

$$R(\sin kx, \cos nx, \operatorname{tg} mx, \operatorname{ctg} lx) = 0, \quad (5)$$

Здесь  $R$  – рациональная функция указанных аргументов ( $k, n, m, l$  – натуральные числа).

С помощью формул для тригонометрических формул суммы углов (в частности, формул двойного и тройного углов) можно свести к рациональному уравнению относительно аргументов  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ . После чего уравнение (5) может быть сведено к рациональному уравнению относительно неизвестного  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{2\operatorname{tg}(x/2)} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

*Пример 1.* Решить уравнение  $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$ .

*Решение.* О.Д.З.  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$ .

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$5 \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - 5 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x + 5, \quad \operatorname{tg} x = t,$$

$$5 \frac{2t}{1+t} - 5 \frac{1-t^2}{1+t^2} = t + 5,$$

$$\frac{10t - 5 + 5t^2}{1+t^2} = t + 5,$$

$$10t - 5 + 5t^2 = (t + 5)(1 + t^2),$$

$$10t - 5 + 5t^2 = t + 5 + t^3 + 5t^2,$$

$$t^3 - 9t + 10 = 0.$$

Первый корень ищем подбором:  $t_1 = 2 \Rightarrow 8 - 18 + 10 = 0$ , следовательно  $t_1 = 2$  – корень уравнения.

$$\begin{array}{r|l} \frac{t^3 - 9t^2 + 10}{t^3 - 2t^2} & \frac{t - 2}{t^2 + 2t - 5} \\ \hline & 2t^2 - 9t \\ & - 2t^2 - 4t \\ \hline & -5t + 10 \\ & - 5t + 10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$t_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5}}{2} = -1 \pm \sqrt{6} = \sqrt{6} \pm 1,$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{6} - 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \operatorname{arctg} (\sqrt{6} - 1) + \pi m, m \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{6} + 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \operatorname{arctg} (\sqrt{6} + 1) + \pi k, k \in Z.$$

Ответ:  $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} \pm 1) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

Пример 2. Решить уравнение  $\cos x + \operatorname{tg}(x/2) = 1$ .

Решение. О.Д.З.  $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Применяем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1,$$

$$\frac{1-t^2+t+t^3}{1+t^2} = 1,$$

$$t^3 - t^2 + t + 1 = 1 + t^2,$$

$$t^3 - 2t^2 + t = 0,$$

$$t(t^2 - 2t + 1) = 0,$$

$$t(t-1)^2 = 0,$$

$$t_1 = 0; \quad t_{2,3} = 1.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1.$$

Первое уравнение имеет корни  $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;

Второе уравнение имеет корни  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x_1 = 2\pi k, k \in Z; x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$ .

### Примеры для самостоятельного решения

Решить уравнения методом универсальной подстановки:

1.  $\sin x + \operatorname{ctg} (x/2) = 2;$                       *Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$

2.  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = 5 \operatorname{tg} 2x + 7;$

*Ответ:*  $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in Z, x_2 = \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, n \in Z.$

3.  $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x;$

*Ответ:*  $x_1 = \pi n, n \in Z, x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2}, k \in Z;$   
 $x_3 = \pi m \pm \pi/3, m \in Z,$

4.  $(1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2\cos x;$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2}(1 + 4k), k \in Z,$

5.  $3\cos x + 4\sin x = 5;$

*Ответ:*  $x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$



**Неоднородное уравнение первого порядка, т.е. уравнение вида**

$$a \sin mx + b \cos mx = c. \quad (6)$$

Такие уравнения решаются различными способами. Рассмотрим два наиболее употребительных:

а) Первый способ основан на применении универсальной тригонометрической подстановки:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . При использовании универсальной подстановки функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  выражаются через  $\operatorname{tg} (x/2)$  по следующим формулам

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Функция  $\operatorname{tg} (x/2)$  не существует для  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , т.е.  $x \neq \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Но  $\sin x$  и  $\cos x$  определены в этих точках. Поэтому необходимо всегда проверять корни  $x = \pi + 2\pi n$  на решение отдельно.

б) Метод дополнительного угла.

В общем случае, для того чтобы преобразовать уравнение (6) к простейшему виду введением вспомогательного угла, разделим обе части на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin mx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos mx = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть  $\varphi$  – одно из этих решений системы

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (7)$$

$$\cos \varphi \sin mx + \sin \varphi \cos mx = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin(mx + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$mx + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = \frac{(-1)^n}{m} \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi \frac{n}{m} - \frac{\varphi}{m}, \quad n \in Z,$$

угол  $\varphi$  определяется из (7).

Полученное уравнение, а значит и искомое имеет решения тогда и только тогда, когда  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Для преобразования уравнений вида (6) можно использовать также формулы синуса разности, косинуса суммы и разности аргументов.

*Пример.* Решить уравнение  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$ .

*Решение.* Решим данный пример двумя способами

а) с помощью универсальной тригонометрической подстановки  $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = t$ , получим уравнение, рациональное относительно  $t$

$$\sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

$$2\sqrt{3}t - 1 + t^2 = 1 + t^2,$$

$$2\sqrt{3}t = 2, \quad t = 1/\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Проверим теперь, не являются ли значения  $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$ ,  $k \in Z$  корнями первоначального уравнения. (Напомним, что при этих значениях теряет смысл функция  $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = t$ ).

Подставив  $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$ ,  $k \in Z$  в исходное уравнение получим

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin(2k+1)\pi - \cos(2k+1)\pi &= 1, \\ \sin(2k+1)\pi &= 0, & \cos(2k+1)\pi &= -1, \\ & & 1 &\equiv 1\end{aligned}$$

Следовательно, значения  $x_2 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$  являются корнями уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z.$$

$$\text{б) } \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1.$$

В нашем случае  $a = \sqrt{3}$ ;  $b = -1$ .

$$\text{Найдем } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Разделим все уравнение на 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Положим  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \varphi$  и  $-\frac{1}{2} = \sin \varphi$ , тогда уравнение примет вид

$$\sin(3x + \varphi) = 1/2,$$

$$3x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - \varphi, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} - \frac{\varphi}{3}, n \in Z,$$

где угол  $\varphi$  находится из системы 
$$\begin{cases} \cos \varphi = \sqrt{3}/2; \\ \sin \varphi = -1/2. \end{cases}$$

Следовательно,  $\varphi = -\pi/6$ . Тогда окончательный ответ

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{18}, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{18}((-1)^n + 1) + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Множества решений этого уравнения полученные в пунктах а) и б), совпадают.

Примеры для самостоятельного решения

1.  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ,      *Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ .

2.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1$ ,      *Ответ:*  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ .

**8. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения или разности**

*Пример.*

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos 5x,$$

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos (2x + 3x),$$

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x,$$

$$\cos 3x \cos 2x = 0,$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z;$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad n, k \in Z.$$

**Уравнения, решаемые преобразованием тригонометрических сумм (разностей) в произведение**

*Пример 1.* Решить уравнение:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

*Решение.* Преобразуя сумму двух и сумму последних двух слагаемых левой части в произведение, получим

$$\begin{aligned}\cos 3x \cos x + \cos 7x \cos x &= 0, \\ \cos x (\cos 3x + \cos 7x) &= 0.\end{aligned}$$

Применим еще раз формулу  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

$$2\cos x \cos 5x \cos 2x = 0,$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = (\pi/2) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow x_2 = (\pi/4) + \pi n/2, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 5x = 0 \Rightarrow x_3 = (\pi/10) + \pi m/5, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}\text{Ответ: } x_1 &= (\pi/2) + \pi k, \quad x_2 = (\pi/4) + \pi n/2, \\ x_3 &= (\pi/10) + \pi m/5, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

**Примеры для самостоятельного решения**

1.  $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0,$

$$\text{Ответ: } x_1 = (\pi/2) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$



$$x_3 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi m, \quad m \in Z.$$

2. Указать в градусах наименьший положительный корень  
 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0,$

*Ответ:*  $90^\circ$ .

3.  $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0,$

*Ответ:*  $x = (\pi/6) + (\pi/3)m, \quad m \in Z.$

### **Уравнения, решаемые понижением степени уравнения**

Если в уравнении есть синус или косинус в четной степени, то степень уравнения может быть понижена с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

*Пример 1.* Решить уравнение

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$$

*Решение.* 
$$\frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} + \frac{1 - \cos 12x}{2},$$

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x,$$

$$\cos 7x \cos x = \cos 11x \cos x,$$

$$\cos x (\cos 7x - \cos 11x) = 0,$$

$$\cos x \sin 9x \sin 2x = 0,$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = (\pi/2) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 9x = 0 \Rightarrow x_2 = \pi k/9, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow x_3 = \pi m/2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Первая серия корней ( $x_1$ ) целиком входит в третью ( $x_3$ ).

*Ответ:*  $x_1 = \pi m/2, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pi k/9, \quad k \in \mathbb{Z}.$

*Пример 2.*  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1/9.$

*Решение.* 
$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 4/9,$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4/9,$$

$$1 + \cos^2 2x = 2/9,$$

$$\cos^2 2x = (2/9) - (9/9),$$

$$\cos^2 2x = -7/9.$$

Данное уравнение решений не имеет.

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1,$

*Ответ:*  $x = (\pi/6) + \pi n/3, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2.  $\cos x - 2\sin^2(x/2) = 0,$

*Ответ:*  $x = \pm(\pi/3) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

## **Уравнения, решаемые преобразованием произведений в сумму или разность**

*Пример.* Решить уравнение  $\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x$ .

*Решение.* Применим к левой и правой частям уравнения формулу

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)). \quad \text{Получим:}$$

$$\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x),$$

$$\cos 6x = \cos 2x,$$

$$\cos 6x - \cos 2x = 0.$$

Применив формулу для разности косинусов, получим уравнение

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0,$$

распадающееся на два уравнения

$$\sin 4x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi n/4, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x_2 = \pi m/2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Совокупность решений  $x_1$  содержит совокупность решений  $x_2$ .

$$\text{Ответ: } x = \pi n/4, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## **Примеры для самостоятельного решения**

1.  $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x,$

Ответ:  $x_1 = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x_2 = \pi/6 + \pi k/3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\sin 5x \sin 4x = -\cos 6x \cos 3x$ ,

Ответ:  $x_1 = \pi/4 + \pi k/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x_2 = \pi/2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Уравнение вида  $R(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$ ,**

где  $R$  – рациональная функция указанных в скобках аргументов, может быть сведено к уравнению относительно неизвестного  $t = \sin x \pm \cos x$ , если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \pm 2\sin x \cos x,$$

из которого следует равенство

$$\sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Учитывая это равенство, первоначальное уравнение приводится к виду:

$$R\left(t, \pm \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 0.$$

*Пример.* Решить уравнение

$$\sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0.$$

*Решение.* Обозначим  $\sin x + \cos x = t$  и воспользуемся равенством

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Исходное уравнение сводится к следующему уравнению относительно  $t$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} &= 0, \\ t_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}, \\ t_1 &= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Таким образом, решение, решение исходного уравнения сводится к решению двух тригонометрических уравнений:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}; \quad \sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эти уравнения являются неоднородными первого порядка, решим их методом дополнительного угла.

Делим оба уравнения на  $\sqrt{2}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 1; \quad \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$x + \pi/4 = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pi/4 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x + \pi/4 = (-1)^k \arcsin(-1/2) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = (-1)^{k+1} \pi/6 - \pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/4 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = (-1)^{k+1} \pi/6 - \pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $\cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0,$

$$\text{Ответ: } x = 2\pi n \pm \arccos \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.  $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x,$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

## Уравнения, решаемые различными формулами тригонометрии

*Пример 1.* Решить уравнение  $\sin(2x - \frac{17}{2}\pi) = 1 + \sin x$ .

*Решение.* Используя формулы приведения, преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin(2x - \frac{17\pi}{2}) = \sin(2x - 8\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x.$$

Учитывая, что  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ , приводим уравнение к виду  $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ ,

$$\sin x = t, \quad t \in [-1, 1]$$

$$2t^2 - t - 2 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx \frac{1 - 4,1}{4} = -0,8 > -1 \Rightarrow t_1 \in \text{О.Д.З.}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx \frac{1 + 4,1}{4} > 1 \Rightarrow t_2 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

*Пример 2.* Решить уравнение  $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} 2\pi x = 1$ .

В ответе указать число корней, принадлежащих промежутку  $[-3; 0]$ .

*Решение.* Найдем область допустимых значений уравнения

$$\text{О.Д.З.} \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x / 2 \neq 0, \\ \operatorname{tg} 2\pi x \neq 0, \\ \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi p, \quad p \in Z, \\ 2\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z. \end{cases} \begin{cases} \pi x / 2 \neq \pi m, \quad m \in Z, \\ 2\pi x \neq \pi k, \quad k \in Z, \\ x \neq 1 + 2p, \quad p \in Z, \\ x \neq 1 + \frac{l}{2}, \quad l \in Z. \end{cases} \begin{cases} x \neq 2m, \quad m \in Z, \\ x \neq k / 2, \quad k \in Z, \\ x \neq 1 + 2p, \quad p \in Z, \\ x \neq \frac{1}{4} + \frac{l}{2}, \quad l \in Z. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} 2\pi x - \operatorname{tg} 2\pi x \operatorname{ctg} 2\pi x = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi x \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \operatorname{ctg} 2\pi x \right) = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi x \neq 0, \quad \frac{\sin \pi x / 2}{\cos \pi x / 2} - \frac{\cos 2\pi x}{\sin 2\pi x} = 0,$$



$$\sin \frac{\pi x}{2} \sin 2\pi x - \cos 2\pi x \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

$$-\cos \left( 2\pi x + \frac{\pi x}{2} \right) = 0,$$

$$\cos \left( \left( 2 + \frac{1}{2} \right) \pi x \right) = 0,$$

$$\cos \left( \frac{5}{2} \pi x \right) = 0, \quad \left( \frac{5}{2} \right) \pi x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (1/5) + (2/5)n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.  $n = -1$ :  $x_1 = 1/5 - 2/5 = -1/5 \in [-3; 0]$ ,  $x_1 \in \text{О.Д.З.}$

2.  $n = -2$ :  $x_2 = 1/5 - 4/5 = -3/5 \in [-3; 0]$ ,  $x_2 \in \text{О.Д.З.}$

3.  $n = -3$ :  $x_3 = 1/5 - 6/5 = -5/5 = -1 \in [-3; 0]$ ,  $x_3 \notin \text{О.Д.З.}$

4.  $n = -4$ :  $x_4 = 1/5 - 8/5 = -7/5 = -1,4 \in [-3; 0]$ ,  $x_4 \in \text{О.Д.З.}$

5.  $n = -5$ :  $x_5 = 1/5 - 10/5 = -9/5 = -1,8 \in [-3; 0]$ ,  $x_5 \in \text{О.Д.З.}$

6.  $n = -6$ :  $x_6 = 1/5 - 12/5 = -11/5 = -2,2 \in [-3; 0]$ ,  $x_6 \in \text{О.Д.З.}$

7.  $n = -7$ :  $x_7 = 1/5 - 14/5 = -13/5 = -2,6 \in [-3; 0]$ ,  $x_7 \in \text{О.Д.З.}$

8.  $n = -8$ :  $x_8 = 1/5 - 16/5 = -15/5 = -3 \in [-3; 0]$ ,  $x_8 \notin \text{О.Д.З.}$

*Ответ:* 6 корней.

*Пример 3.* Решить уравнение

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x.$$

*Решение.*

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x = \sin 2x \cos 2x,$$

$$2\sin^2 2x \cos^2 2x + \sin 2x \cos 2x - 1 = 0.$$

Обозначим  $\sin 2x \cos 2y = y$ , тогда последнее уравнение примет вид:

$$2y^2 + y - 1 = 0, \text{ или } 2(y+1)(y-1/2) = 0.$$

Перейдем к переменной  $x$  и будем иметь:

1.  $\sin 2x \cos 2x = -1,$

$$2\sin 2x \cos 2x = -2,$$

$\sin 4x \neq -2 \Rightarrow$  уравнение решений не имеет  $x \in \emptyset$ .

2.  $\sin 2x \cos 2x = 1/2,$

$$\sin 4x = 1,$$

$$4x = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \pi/8 + (\pi/2)n, n \in Z.$$

*Ответ:*  $x = \pi/8 + (\pi/2)n, n \in Z.$

*Пример 4.* Решить уравнение  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi \cdot 3^x}{1+3^x} \right) = \sqrt{3}.$

*Решение.*  $\frac{\pi \cdot 3^x}{1+3^x} = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z,$

$$\frac{3^x}{1+3^x} = \frac{1}{3} + n,$$

$$3 \cdot 3^x = (1+3^x)(1+3n),$$

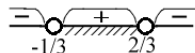
$$3 \cdot 3^x = 1+3^x + 3n(1+3^x),$$

$$2 \cdot 3^x - 3n \cdot 3^x = 1 + 3n,$$

$$3^x = \frac{1+3n}{2-3n}; \quad 3^x > 0.$$

$$\frac{1+3n}{2-3n} > 0,$$

$$-\frac{1}{3} < n < \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Следовательно,  $n = 0$ .

$$3^x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = \log_3(1/2) = -\log_3 2.$$

Ответ:  $x = -\log_3 2$ .

### Тригонометрические уравнения решаемые с использованием оценок (использование ограниченности функций $\sin x$ , $\cos x$ )

Пример 1. Решить уравнение  $\sin(\pi \sin x) = -1$ .

Решение.  $\pi \sin x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sin x = -1/2 + 2k, \text{ т.е. } -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ то}$$

$$-1 \leq -1/2 + 2k \leq 1$$

$$-1/2 \leq 2k \leq 3/2,$$

$$-1/4 \leq k \leq 3/4 \quad \Rightarrow \quad k = 0, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,  $\sin x = -1/2$ ,  
 $x = (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in Z$ .  
*Ответ:*  $x = (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in Z$ .

*Пример 2.* Решить уравнение  $\sin 7x + \cos 2x = -2$ .

*Решение.* Так как  $|\sin 7x| \leq 1$ ,  $|\cos 2x| \leq 1$ , то исходное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 7x = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases} \begin{cases} 7x = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x = \pi + 2\pi m, m \in Z. \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

Решением системы, а, следовательно, и исходного уравнения, являются те значения  $x$ , которые принадлежат как первому, так и второму множеству. Для того чтобы найти эти значения, приравняем выражения, стоящие в правых частях уравнений системы. Если найдутся целые значения  $n$  и  $m$ , при которых эти выражения совпадают, то полученные значения  $x$  удовлетворяют обоим уравнениям системы.

$$-\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$m = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}n, \quad m = \frac{2n-4}{7} = \frac{2(7l+2)-4}{7} = 2l, \quad l \in Z,$$

где  $n$  положили равным  $n = 7l + 2$ .

Найденные значения  $n$  и  $m$

$$n = (7l + 2) \in Z,$$

$$m = 2l \in Z$$

подставим в систему

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi(7l+2) = \frac{7}{14}\pi + 2\pi l = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

*Пример 3.* Решить уравнение:  $\sin x + \sin 3x = 2$ .

*Решение.* С учетом ограниченности функций  $\sin x$ ,  $\sin 3x$ , исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ 3x = \pi/2 + 2\pi m, \quad m \in Z. \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi m, \quad m \in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{12} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi m,$$

$$\frac{1}{2} + 2n = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}m,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}m - 2n, \quad \frac{1}{3} = \frac{2m - 6n}{3}, \quad 1 = 2m - 6n.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений в целых числах, так как при любых  $n$  и  $m$  справа стоит четное число, а слева нечетное. Таким образом, уравнения системы не имеют общих точек и исходное уравнение решения не имеет.

*Пример 4.* Решите уравнение:  $2^{|\cos 2x|} = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}}$ .

*Решение.*  $2^{|\cos 2x|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x,$

$$2^{|\cos 2x|} = \sin 3x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{4},$$

$$2^{|\cos 2x|} = \sin(3x - \frac{\pi}{4}).$$

Так как  $-1 \leq \sin(3x - \pi/4) \leq 1$ , а

$$1 \leq 2^{|\cos 2x|} \leq 2,$$

то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|\cos 2x|} = 1, & \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin(3x - \pi/4) = 1. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi/2 + \pi n, & \begin{cases} x = \pi/4 + \pi n/2, & n \in Z, \\ x = \pi/4 + (2/3)\pi k, & k \in Z. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k,$$

$$\frac{n}{2} = \frac{2k}{3} \Rightarrow k = 3l, l \in Z \Rightarrow \left. \begin{matrix} k = 3l \\ n = 4l \end{matrix} \right\} \in Z,$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} 4l, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \pi 3l, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x = \pi/4 + 2\pi l, l \in Z.$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $2\cos 2x + \sin(5x/2) = 3,$       *Ответ:*  $x = \pi + 4\pi m, m \in Z.$

2.  $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos(12x/5) = 5 - 3\cos^2 x,$

*Ответ:*  $x = -(5/6)\pi + 5\pi k, k \in Z.$

3.  $\cos \frac{\sqrt{2}+1}{2} x \cos \frac{\sqrt{2}-1}{2} x = 1,$       *Ответ:*  $x = 0.$

4.  $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0,$       *Ответ:*  $x = \pi/2 + 2\pi m, m \in Z.$

5.  $\sin(x/2) \cos 2x = 1,$       *Ответ:*  $x = \pi + 4\pi m, m \in Z.$

6.  $\sin^4 x + 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0,$

*Ответ:*  $x = \pi + 2\pi m, m \in Z.$

7.  $\sin 2x(3\sin 2x - \cos(x/2)) = \cos 2x(2 + \sin(x/2) - 3\cos 2x),$  в ответ записать решение, удовлетворяющее условию  $0^\circ < x \leq 180^\circ.$

*Ответ:*  $180^\circ.$

8.  $\sin^2 x - 1 + \sin^2 3x - 2\sin 3x - \sin x = -9/4,$



*Ответ:*  $x_1 = \pi/6 + 2\pi l$ ,  $x_2 = -(7/6)\pi + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

9.  $2^{\cos^4 2x + 1/2} = \sin 3x - \cos 3x$ , *Ответ:*  $x = \pi/4 + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

10.  $\frac{12 \sin^2 \pi x}{1 + 2^{\sin \pi x}} = |3x + 7| + 3\sqrt{x^2 + 10x + 25}$ ,

*Ответ:*  $x = -5/2$ ,  $x = -9/2$ .

11.  $(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x) \sin x + (1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x) \cos x = 0$ ,

*Ответ:*  $x = -2\pi + 8\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$11. (\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x) \sin x + (1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x) \cos x = 0,$$

Ответ:  $x = -2\pi + 8\pi t, t \in \mathbb{Z}$ .

### Тригонометрические уравнения с параметром

Пример 1. При каком значении  $k$  уравнение

$$\frac{1}{3} \sqrt{17 + 8 \cos x - 16 \sin^2 x} - \frac{4}{3} \left| \cos x + \frac{1}{4} \right| = k$$

имеет решение?

Решение. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sqrt{17 + 8 \cos x - 16 \sin^2 x} &= \frac{1}{3} \sqrt{17 + 8 \cos x - 16(1 - \cos^2 x)} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{17 + 8 \cos x + 16 + 16 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \sqrt{(4 \cos x)^2 + 8 \cos x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(4 \cos x + 1)^2} = \frac{1}{3} |4 \cos x + 1| = \frac{4}{3} \left| \cos x + \frac{1}{4} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{4}{3} \left| \cos x + \frac{1}{4} \right| - \frac{4}{3} \left| \cos x + \frac{1}{4} \right| = k \Rightarrow k = 0.$$

Уравнение будет непротиворечиво, только при  $k = 0$  (тогда оно обращается в тождество).

*Ответ:*  $k = 0$ .

*Пример 2.* При каких значениях  $k$  уравнение

$$\frac{1}{3}\sqrt{17 + 8\cos x - 16\sin^2 x} + \frac{4}{3}\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k$$

имеет решение?

*Решение.* 
$$\frac{4}{3}\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| + \frac{4}{3}\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k$$

$$\frac{8}{3}\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k \Rightarrow \text{О.Д.З. } k \geq 0.$$

$$\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{8}k, \quad \cos x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{8}k, \quad \text{т.к. } -1 \leq \cos x \leq 1, \text{ то}$$

$$-1 \leq -1/4 \pm (3/8)k \leq 1,$$

$$-8 \leq -2 \pm 3k \leq 8,$$

$$-6 \leq \pm 3k \leq 10.$$

При знаке «+» имеем:  $-6 \leq 3k \leq 10,$

$$-2 \leq k \leq 10/3,$$

$$-2 \leq k \leq 3, (3),$$

т.к.  $k \geq 0$ , то  $k \in [0; 10/3]$ .

При знаке « $\leftarrow$ » имеем:

$$-10 \leq 3k \leq 6,$$

$$-3, (3) \leq k \leq 2,$$

т.к.  $k \geq 0$ , то  $k \in [0; 2]$ .

Объединением двух множеств есть множество:

$$[0; 10/3] \cup [0; 2] = [0; 10/3].$$

*Ответ:*  $k \in [0; 3, (3)]$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1. Найти все целые значения  $k$ , при каждом из которых уравнение:  $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2(x/2) = 3k$  имеет решение. В ответ записать наибольшее  $k$ .

*Ответ:* 1.

2. Найти все целые значения  $k$ , при которых уравнение:

$$\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

имеет решение. Найти эти решения.

*Ответ:*  $k = 4l, l \in Z; x = \pi/2 + 2\pi m, m \in Z$ .

## Иррациональные тригонометрические уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} - 2 \cos x = 0.$$

Решение.  $\sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} = 2 \cos x.$

Следовательно,  $\cos x \geq 0 \Rightarrow x \in \left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right].$

Возводим уравнение в квадрат

$$4 \cos 2x - 2 \sin 2x = 4 \cos^2 x,$$

$$4 \cos 2x - 2 \sin 2x = 4 \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$4 \cos 2x - 2 \sin 2x = 2 + 2 \cos 2x,$$

$$2 \cos 2x - 2 \sin 2x = 2,$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 1.$$

Воспользуемся методом дополнительного угла

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Разделим все уравнение на  $\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2x + \frac{3}{4}\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}n.$$

При  $n$  – четном ( $n = 2l, l \in Z$ )

$$x_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}2l = -\frac{\pi}{4} + \pi l, \quad l \in Z.$$

При  $n$  – нечетном ( $n = 2l+1, l \in Z$ )

$$x_2 = -\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}2l + \frac{\pi}{2} = \pi l, \quad l \in Z.$$

С учетом того, что  $\cos x \geq 0$ :

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l, \quad x_2 = 2\pi l, \quad l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l, \quad x_2 = 2\pi l, \quad l \in Z.$$

*Пример 2.* Решить уравнение

$$\sqrt{12 \sin x + \cos^2 x + 4} = -\sqrt{10} \cos x.$$

*Решение.* Из вида уравнения заключаем, что  $\cos x \leq 0$  (I, III четверти). Возводим в квадрат:

$$12 \sin x + \cos^2 x + 4 = 10 \cos^2 x,$$

$$12 \sin x - 9 \cos^2 x + 4 = 0,$$

$$12 \sin x - 9(1 - \sin^2 x) + 4 = 0,$$

$$9 \sin^2 x + 12 \sin x - 5 = 0.$$

Обозначим  $\sin x = t, t \in [-1; 1]$

$$9t^2 + 12t - 5 = 0,$$

$$t_1 = -5/3 \notin [-1; 1], \quad t_2 = 1/3 \in [-1; 1].$$

$$\sin x = 1/3 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin(1/3) + \pi k, \quad k \in Z.$$

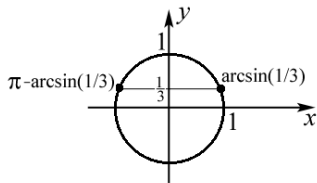
При  $k$  – четном ( $k = 2l, l \in Z$ )

$$x_1 = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

При  $k$  – нечетном ( $k = 2l + 1, l \in Z$ )

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

С учетом того, что  $\cos x \leq 0$ , заключаем



$$x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi l, l \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi l, l \in Z.$$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $\sqrt[3]{2 - \operatorname{tg} x} + \sqrt{7 + \operatorname{tg} x} = 3,$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\operatorname{arctg} 6 + \pi k, k \in Z, x_2 = \pi/4 + \pi n, n \in Z.$$

2.  $\frac{4}{3} \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2 \cos x} - \sqrt{\sin 2x},$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/2 + 2\pi k, k \in Z, x_2 = \pi/3 + 3\pi m, m \in Z.$$

3.  $\sqrt{4 + 3 \cos x - \cos 2x} = \sqrt{6} \sin x,$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi + 2\pi n, n \in Z, x_2 = \arccos(1/4) + 2\pi m, m \in Z.$$

4.  $\sqrt{4 \sin x + \cos 2x + 5} = 2\sqrt{2} \cos x,$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\pi/2 + 2\pi m, m \in Z, x_2 = \arcsin(1/3) + 2\pi l, l \in Z.$$

5.  $(2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1) \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0,$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/6 + 2\pi k, k \in Z, x_2 = \pi n, n \in Z.$$

6.  $(2 \cos^2 x - \cos x - 1) \sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0,$



Ответ:  $x_1 = \pi/2 + \pi n, n \in Z, x_2 = -(2/3)\pi + 2\pi k, k \in Z.$

7.  $\sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} - 2 \cos x = 0,$

Ответ:  $x_1 = 2\pi n, n \in Z, x_2 = -\pi/4 + \pi k, k \in Z.$

8.  $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2 \cos 2x},$

Ответ:  $x = \pi/4 + \pi n, n \in Z.$

9.  $\sqrt{1 + 3 \operatorname{ctg} x} + \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg} x}} = \frac{5}{2},$

Ответ:  $x_1 = \pi/4 + \pi n, n \in Z, x_2 = -\arccos 4 + \pi m, m \in Z.$

10.  $\sqrt{3 + 2 \sin x - 2 \cos x} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x),$

Ответ:  $x_1 = -\pi/6 + 2\pi n, n \in Z, x_2 = \pi/3 + 2\pi k, k \in Z.$

11.  $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x, x \in [\pi; 3\pi],$

Ответ:  $2\pi; 5\pi/2.$

### **Тригонометрические уравнения содержащие модуль**

Пример 1.  $\cos x = |\sin x|.$

Решение 1. 1)  $\sin x \geq 0, \cos x = \sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1, x = \pi/4 + \pi n,$

т. к.  $\sin x \geq 0,$  то  $x_1 = \pi/4 + 2\pi n, n \in Z.$

2)  $\sin x < 0, \cos x = -\sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1, x = -\pi/4 + \pi n,$

т. к.  $\sin x < 0$ , то  $x_2 = -\pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x_1 = \pi/4 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x_2 = -\pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Решение 2.* Запишем уравнение в виде  $\cos x - |\sin x| = 0$  и будем искать его корни на отрезке  $[0; \pi]$ . На этом отрезке его можно записать в виде  $\cos x = \sin x$ , и его единственным корнем является  $\pi/4$ . Так как функция  $f(x) = \cos x - |\sin x|$  четная, то на отрезке  $[-\pi; \pi]$  уравнение имеет решения  $\pi/4$  и  $-\pi/4$ . Так как  $f(x)$  имеет период  $2\pi$ , то она обращается в 0 в точках

$$\pi/4 + 2\pi k \quad \text{и} \quad -\pi/4 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \pm\pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Решение 3.* Синус и косинус угла равны по модулю, если соответствующая точка единичной окружности лежит на биссектральном диаметре. Так как косинус должен быть неотрицательным, то данному уравнению удовлетворяют углы

$$\pi/4 + 2\pi k \quad \text{и} \quad -\pi/4 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \pm\pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Пример 2.* Решить уравнение  $\sqrt{3} \sin x = |\cos x|$ .

*Решение.*  $\sqrt{3} \sin x = |\cos x| \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin^2 x = \cos^2 x, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

$$3\sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow 4\sin^2 x = 1.$$

Учитывая неравенство  $\sin x \geq 0$ , получаем

$$\sin x = 1/2, \text{ т.е. } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

*Пример 3. Решить уравнение  $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$ .*

*Решение. Данное уравнение распадается на две системы*

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2\pi n, n \in Z.$$

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \cos x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0, \\ \operatorname{tg} x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_2 =$$

$$(5/4)\pi + 2\pi m, m \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 2\pi n, n \in Z; x_2 = (5/4)\pi + 2\pi m, m \in Z.$$

*Пример 4. Решите уравнение:  $\sin x = \operatorname{tg} x / \sin x$ .*

*Решение. 1)  $\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi n, n \in Z$ ;*

$$2) \sin x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_2 = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

*Из этих углов условию  $\sin x > 0$  удовлетворяют только*

$$x_2 = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \sin x < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x_3 = -\pi/4 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:  $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $x_{2,3} = \pm\pi/4 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .*

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$ ,

Ответ:  $x_1 = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $x_2 = -\pi/4 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2.  $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$ ,

Ответ:  $x = 5\pi/6 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3.  $\cos x = |\cos x|/(x + 1,5)^2$ ,

Ответ:  $x_1 = -0,5$ ,  $x_2 = \pi/2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4.  $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3} |\sin x|$ ,

Ответ:  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

5.  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x = 3 |\cos x|$ ,

Ответ:  $x_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$x_2 = \pi + \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_3 = \pi/2 + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

6.  $2\sin^2 x = |\sqrt{3} \operatorname{tg} x|$ ,

Ответ:  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

7.  $\cos x = \operatorname{tg} x |\cos x|$ ,

Ответ:  $x_1 = \pi/4 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_2 = 3\pi/4 + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

8.  $|\cos x|/(2x - 4) = |x - 2|$ ,

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \pm\pi/3 + 2\pi k$ ,  $k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$x_3 = 2\pi/3 + 2\pi m, m \geq 0, m \in \mathbb{Z}, x_4 = -2\pi/3 + 2\pi n, n \geq 1, n \in \mathbb{Z}.$$

9.  $|\operatorname{tg} x|/(x + 3) = |x + 3|,$

Ответ:  $x_1 = -3, x_2 = \pi/4 + \pi k, k \geq -1, k \in \mathbb{Z},$

$x_3 = -\pi/4 + \pi k, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}.$

10.  $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2},$

Ответ:  $x = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

11.  $|\sin |x|/\cos x| \cdot |\beta - 4\sin^2 x| \cdot |4\cos^2 x - 3| = 1/2,$

Ответ:  $x = \pi/12 + \pi n/6, n \in \mathbb{Z}.$

12.  $\sin^2 x = \cos x \cdot |\sin x|,$

Ответ:  $x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = \pm\pi/4 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

13.  $2\sin^2 x = |\sin x|,$

Ответ:  $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x_{2,3} = \pm\pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

## Уравнения, содержащие переменные под знаком аркфункции

### Решение простейших уравнений

Уравнение	Решение
$\arcsin x = a,  a  \leq \pi/2$	$x = \sin a$
$\arccos x = a, 0 \leq a \leq \pi$	$x = \cos a$
$\operatorname{arctg} x = a,  a  \leq \pi/2$	$x = \operatorname{tg} a$
$\operatorname{arcctg} x = a, 0 < a < \pi$	$x = \operatorname{ctg} a$

1. Уравнения вида  $P(y(x)) = 0$ , где  $P$  – некоторая рациональная функция, а  $y(x)$  – одна из аркфункций сводятся к простейшим уравнениям

$$y(x) = y_i,$$

где  $y_i$  – корни уравнения  $P(y) = 0$ .

*Пример.* Решить уравнение

$$2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0.$$

*Решение.* Обозначим за  $y = \arcsin x$ , получим уравнение

$$2y^2 - y - 6 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}, y_1 = 2; y_2 = -3/2.$$

Следовательно, решение исходного уравнения сводится к решению двух простейших уравнений:

$$\begin{array}{ll} \arcsin x = 2 & 2 > \pi/2 \approx 1,6, \\ \arcsin x = -3/2 & |-3/2| < \pi/2. \end{array}$$

Таким образом, единственным решением будет

$$x = \sin(-3/2) = -\sin(3/2).$$

*Ответ:*  $x = -\sin(3/2)$ .