МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Ю.И. ГАЛАНОВ, Е.Н. НЕКРЯЧ, В.И. РОЖКОВА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Электронное пособие для абитуриентов

Издательство
Томского политехнического университета
2011

Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений, решение которых записывается в виде формул, содержащих бесчисленное множество решений. В связи с тем, что по условию задачи можно записать единственный числовой ответ, абитуриенты часто упускают запись решения в общем виде – это неверно. Нужно полностью записать решение тригонометрического уравнения, описать все множество его решений и только после этого выбрать единственный числовой ответ.

Приведем основные формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

I. $\sin x = a$; x – любое, при $|a| > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$;

$$\text{при } |a| \le 1 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z \qquad (1)$$

Частные случаи:

1. $\sin x = 0,\qquad x = \pi n,\ n \in Z$
2. $\sin x = 1,\qquad x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
3. $\sin x = -1,\qquad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

II. $\cos x = a$; x – любое, при $|a| > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$;

$$\text{при } |a| \le 1 \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \qquad (2)$$

Частные случаи:

1. $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

2. $\cos x = 1$, $x = 2\pi n,\ n \in Z$

3. $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

III. $\operatorname{tg} x = a$; $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, a – любое $\Rightarrow$

$$x = \operatorname{arctg} x + \pi n, n \in Z \tag{3}$$

Частные случаи:

1. $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n,\ n \in Z$

2. $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

3. $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

IV. $\operatorname{ctg} x = a$; $x \neq \pi n, n \in Z$, a – любое $\Rightarrow$

$$x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, n \in Z \tag{4}$$

Частные случаи:

1. $\operatorname{ctg} x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

2. $\operatorname{ctg} x = 1, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

3. $\operatorname{ctg} x = -1, \qquad x = \frac{3}{4}\pi + \pi n,\ n \in Z$

В (1) – (4) решения уравнений выражены через значения обратных тригонометрических функций. Напомним некоторые свойства этих функций:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}, \qquad a \in [-1;\ 1]$$

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \qquad a - \text{любое}$$

$$0 \le \arccos a \le \pi, \qquad a \in [-1;\ 1]$$

$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi, \qquad a - \text{любое}$$

Функции arcsin a, arctg a являются нечетными; функции arccos a, arcctg a не являются четными, не являются нечетными.

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех определяется, в частности, знанием тригонометрических формул и навыками решения задач.

<u>Необходимо помнить следующие моменты:</u>

1. При решении тригонометрических уравнений нельзя сокращать на переменную величину, это может привести к потере корней уравнения. Необходимо каждый множитель исследовать на решение.
2. При решении тригонометрических уравнений необходимо учитывать область допустимых значений (О.Д.З.).
3. При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появляться посторонние корни. Необходима отборка полученных решений, но это сложно, поэтому по возможности нужно обходиться без этой операции.
4. Потеря корней уравнения может произойти и от замены тригонометрических функций через тангенс $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ – универсальная тригонометрическая подстановка. Тогда

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Функция tg $(x/2)$ не существует для $x/2 = \pi/2 + \pi n$, т.е. $x \neq \pi + 2\pi n$. Но $\sin x$ и $\cos x$ определены в этих точках. Поэтому необходимо всегда проверять корни $x = \pi + 2\pi n$ на решение отдельно.

Типы тригонометрических уравнений

1. <u>Уравнения, приводящиеся к алгебраическим с помощью основных формул</u>

Пример 1. Найдите в градусах решение уравнения

$$4\cos^2 2x + 16\sin 2x - 11 = 0$$

удовлетворяющее условию $0° < x < 45°$.

Решение. $4(1 - \sin^2 2x) + 16\sin 2x - 11 = 0$

$$4 - 4\sin^2 2x + 16\sin 2x - 11 = 0.$$

Обозначим $\sin 2x = t$, тогда $t \in [-1; 1]$

$$4 - 4t^2 + 16t - 11 = 0$$

$$4t^2 + 16t + 7 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 4 \cdot 7}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 12}{8};$$

$$t_1 = \frac{28}{8} = 3{,}5 \notin \text{О.Д.З.}; \quad t_2 = \frac{4}{8} = 0{,}5 \in \text{О.Д.З.}$$

$$\sin 2x = 0{,}5;\ 2x = (-1)^n \arcsin(0{,}5) + \pi n,\ n \in Z.$$

$$x = \frac{(-1)^n}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Рассмотрим корни, принадлежащие (0; 45 °)

$n = 0$, $x = \pi/12 = 15° \in (0; 45°)$

$n = 1, \quad x = 90° - 15° = 75° \notin (0; 45°)$

$n = -1, \quad x = -90° - 15° = -105° \notin (0; 45°)$

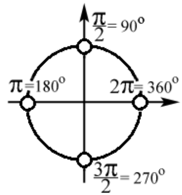
Ответ: 15 °.

Пример 2. Найдите наименьшее решение x уравнения

$$2\text{tg}\, x + 3\text{ctg}\, x = 5,$$

если $x \in (0°; 180°)$.

Решение. О.Д.З. $\begin{cases} x \neq \pi/2 + \pi n, & n \in Z, \\ x \neq \pi k, & k \in Z. \end{cases}$



Заменим $\text{tg}\, x = t$, тогда $\text{ctg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}x} = \dfrac{1}{t}$.

Получим уравнение: $2t + 3/t = 5,$

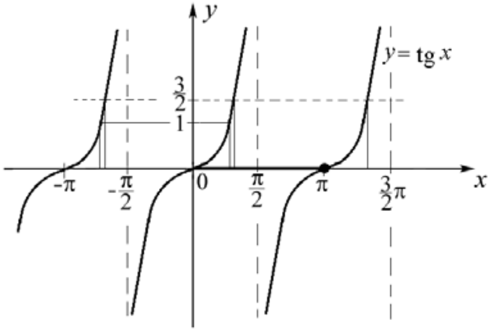
$$2t^2 + 3 = 5t,$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение имеем $t_1 = 1$; $t_2 = 3/2$.

Итак, $\text{tg}\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z$;

$\operatorname{tg} x = 3/2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) + \pi k,\ k \in Z.$



Затем найдем x_1 и x_2 при $n = 0$, $n = \pm 1$, $k = 0$, $k = \pm 1$.

$n = 0, \quad x_1 = 45\,° \in (0\,°;\, 180\,°);$

$n = 1, \quad x_1 = 225\,° \notin (0\,°;\, 180\,°);$

$n = -1, \quad x_1 = -135\,° \notin (0\,°;\, 180\,°);$

$k = 0, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) \in (0\,°;\, 180\,°);$

$k = 1, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) + \pi \notin (0\,°;\, 180\,°);$

$k = -1, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(3/2) - \pi \notin (0\,°;\, 180\,°).$

$\operatorname{arctg}(3/2) > \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, следовательно, из полученных решений наименьшим, принадлежащим данному интервалу, будет $x = 45\,°$.

Ответ: $x = 45\,°$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0;$ *Ответ*: $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2. $\mathrm{tg}^3\,\pi + 2\mathrm{tg}^2\,x + 3\mathrm{tg}\,x = 0;$ *Ответ*: $x = \pi n,\ n \in Z.$

3. $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x;$ *Ответ*: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

4. $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x;$ *Ответ*: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

5. $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0;$ *Ответ*: $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

6. Найдите наименьшее решение x в градусах, удовлетворяющее заданному условию $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0,\ x \in (-90\,°; 270\,°).$

Ответ: $-60\,°.$

7. $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2};$

Ответ: $x \in [\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n] \cup [\frac{2}{3}\pi + \pi n; \frac{5}{6}\pi + \pi n], n \in Z.$

8. $6\mathrm{tg}^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$; *Ответ*: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

9. $\mathrm{tg}\, x - \sin^2 5x = \cos^2 5x, \quad x \in [0; \pi]$; *Ответ*: $45°$.

10. $\mathrm{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2,\ x \in (90°; 180°)$; *Ответ*: $150°$.

11. $\sqrt{\sin x} = \sin x, \quad x \in (-45°; 45°)$; *Ответ*: $0°$.

12. $1 + \cos x = \mathrm{ctg}\frac{x}{2}, \quad x \in (0°; 90°)$; *Ответ*: $60°$.

13. $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 1 = -2, \quad x \in [-180°; 0°)$; *Ответ*: $-180°$.

14. $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$; *Ответ*: $\pm\arccos(1/3) + 2\pi n,\ n \in Z.$

Уравнения, приводящиеся к виду: $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$

Решение таких уравнений основано на следующем положении: если левая часть уравнения является произведением нескольких сомножителей, а правая часть равна 0, то корнями такого уравнения служат те и только те значения переменной, при которых хотя бы один из сомножителей обращается в 0, но ни один из остальных не теряет числового смысла.

Пример 1. $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x$.

Решение. О.Д.З. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in Z$.

Сгруппируем члены уравнения и преобразуем его следующим образом:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x) - (1 + \sin x) = 0,$$
$$(1 + \sin x)\operatorname{tg} x - (1 + \sin x) = 0,$$
$$(1 + \sin x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Получившееся уравнение равносильно исходному. Если x – решение этого уравнения, то x является и решением одного из уравнений:

$$1 + \sin x = 0, \qquad \operatorname{tg} x - 1 + 0.$$

$$\sin x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z,\ x_1 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z,\ \ x_2 \in \text{О.Д.З.}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathrm{Z}$.

Пример 2. $\sin 4x = \cos (180° - 2x)$. Указать $x \in [-30°; 0°]$.

Решение. По формуле приведения $\cos(180° - 2x) = -\cos 2x$. Тогда

$$\sin 4x = -\cos 2x,$$

$$2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x\,(2\sin 2x + 1) = 0,$$

$$\cos 2x = 0, \qquad \sin 2x = -1/2.$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z;$$

$$2x_2 = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in Z \ \Rightarrow x_2 = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ \ k \in Z,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z; \quad x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z,$$

$n = 0$, $x_1 = 45° \notin [-30°; 0°]$; $\quad k = 0$, $x_2 = -15° \in [-30°; 0°]$;
$n = 1$, $x_1 = 135° \notin [-30°; 0°]$; $\quad k = 1$, $x_2 = 105° \notin [-30°; 0°]$;
$n = -1$, $x_1 = -45° \notin [-30°; 0°]$; $\quad k = -1$, $x_2 = -75° \notin [-30°; 0°]$.

В промежутке $[-30°; 0°]$ имеется лишь один корень исходного уравнения.

Ответ: $-15°$.

Пример 3. Решить уравнение: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x).$$

Правую часть разложим в произведение как сумму кубов:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x).$$

Теперь уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=0,$$

$$(\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\sin x\cos x\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\sin x+\cos x=0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}-1+\sin x\cos x=0.$$

$$\sin x=-\cos x \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg} x=-1\Rightarrow\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\sin x\cos x=1-\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad 2\sin x\cos x=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\sin 2x=2-\sqrt{2}, \quad \text{т.к. } 2-\sqrt{2}<1, \quad \text{то}$$

$$2x_2 = (-1)^{\mathrm{n}} \arcsin (2 - \sqrt{2}\,) + \pi k,\ k \in Z,$$

$$x_2 = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin (2 - \sqrt{2}\,) + \frac{\pi}{2} k,\ \ k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

$$x_2 = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin (2 - \sqrt{2}\,) + \frac{\pi}{2} k,\ \ k \in Z.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sin 2x = \cos x;$

Ответ: $x_1 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ \ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

2. $2\cos x \cos 2x = \cos x;$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\quad x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

3. Найдите решение (в градусах) уравнения $\sin x = \cos 2x$, удовлетворяющего условию $-80° < x < 80°$. *Ответ*: 30 °.

Уравнения, приводящиеся к виду: $\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_m(x)} = 0$

Корнями такого уравнения служат те и только те значения, при которых выполняются следующие условия:

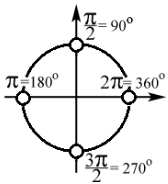
$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_n(x) = 0 \quad \text{и}$$
$$g_1(x) \neq 0,\ g_2(x) \neq 0,\ \ldots,\ g_n(x) \neq 0.$$

Пример 1. Решить уравнение: $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos x - \sin x}{(1/2)\sin 2x}$. В ответе укажите число корней уравнения, удовлетворяющих условию $0° < x < 180°$.

Решение. О.Д.З.

$$\begin{cases} x \neq \pi n, \quad n \in Z \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, \quad k \in Z \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, \quad n \in Z \\ x \neq (\pi/2) + \pi k, \quad k \in Z \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} l, \quad l \in Z. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x \neq \frac{\pi}{2} l, \, l \in \mathrm{Z}.$$



Запишем уравнение в следующем виде

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{(1/2)\sin 2x},$$

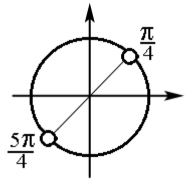
$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos s} = \frac{\cos x - \sin x}{(1/2)\sin 2x},$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(1/2)2\sin x \cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{(1/2)\sin 2x} = 0,$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1)}{(1/2)\sin 2x} = 0,$$

$(1/2)\sin 2x \neq 0$; $\cos x - \sin x = 0$;

$\cos x + \sin x - 1 = 0$; $\cos x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\, x = 1 \Rightarrow$



$\Rightarrow \quad x_1 = (\pi/4) + \pi n,\ n \in Z$;

$$\cos x + \sin x - 1 = 0,$$

$$\sin x = 1 - \cos x,$$

$$\sin (2x/2) = 1 - \cos x,$$

$$2\sin (x/2) \cos (x/2) = 2 \sin^2 (x/2),$$

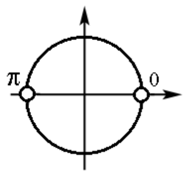
$$2\sin (x/2) (\cos(x/2) - \sin (x/2)) = 0.$$

Следовательно, $2\sin (x/2) = 0$,

$$\cos (x/2) - \sin (x/2) = 0.$$

$\sin (x/2) = 0 \quad \Rightarrow \; x/2 = \pi k,\ k \in Z \;\Rightarrow$

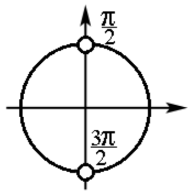
$\Rightarrow \; x_2 = 2\pi k,\ k \in Z$;



$\sin (x/2) = \cos (x/2) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\, (x/2) = 1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x/2 = (\pi/4) + \pi l,\ l \in Z \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \; x_3 = (\pi/2) + 2\pi l,\ l \in Z.$



$x_1 \in$ О.Д.З. $x_2 \notin$ О.Д.З. $x_3 \notin$ О.Д.З.

$$x = (\pi/4) + \pi n,\ n \in Z.$$

$n = 0$, $x = 45° \in (0°; 180°)$,

$n = 1$, $x = 45° + 180° = 225° \notin (0°; 180°)$,

$n = -1$, $x = 45° - 180° = -135° \notin (0°; 180°)$.

В промежутке $(0°; 180°)$ находится один корень исходного уравнения.

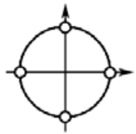
Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \dfrac{1 + \cos 2x}{2\cos x}$.

Решение. О.Д.З.

$$\begin{cases}1-\cos 2x \neq 0,\\ 2\cos x \neq 0.\end{cases}\quad \begin{cases}\cos 2x \neq 1,\\ \cos x \neq 0.\end{cases}\quad \begin{cases}2x \neq 2\pi n,\ n\in Z,\\ x \neq (\pi/2)+\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \neq \pi n, \quad n\in Z,\\ x \neq (\pi/2)+\pi k, \quad k\in Z.\end{cases}$$



Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\sin 2x}{2\dfrac{1-\cos 2x}{2}}-\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=0,$$

$$\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x}-\frac{2\dfrac{1+\cos 2x}{2}}{2\cos x}=0,$$

$$\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x}-\frac{2\cos^2 x}{2\cos x}=0,$$

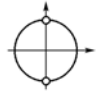
$$\frac{2\sin x\cos^2 x-2\cos^2 x\sin^2 x}{2\sin^2 x\cos x}=0,$$

$$\frac{2\sin x\cos^2 x(1-\sin x)}{2\sin^2 x\cos x}=0.$$

$2\sin^2 x \cos x \neq 0, \qquad \sin x = 0, \quad \cos^2 x = 0, \qquad 1 - \sin x = 0.$

$\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \pi l, \;\; l \in Z;$

$\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = (\pi/2) + \pi m, \;\; m \in Z;$



$\sin x = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = (\pi/2) + 2\pi p, \;\; p \in Z.$

$x_1 \notin$ О.Д.З. $\qquad x_1 \notin$ О.Д.З. $\qquad x_1 \notin$ О.Д.З.

Ответ: $\varnothing$.

Однородные уравнения

Уравнение вида

$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1} x\cos x + a_2\sin^{n-2} x\cos^2 x + a_3\sin^{n-3} x\cos^3 x + \ldots + {} + a_n\cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа и сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n, называется *однородным* относительно $\sin x$, $\cos x$.

Оно решается делением обеих частей уравнения на $\cos x$ или $\sin x$. В первом случае получается уравнение вида:

$$a_0\operatorname{tg}^n x + a_1\operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0.$$

Во втором случае – $a_0\operatorname{ctg}^n x + a_1\operatorname{ctg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0$.

Заменяя $\operatorname{tg} x = t$ ($\operatorname{ctg} x = t$) получаем алгебраическое уравнение.

Пример 1. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = 0.$$

Решение. Разделим исходное уравнение на $\cos^2 x$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 8 = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$

$$3t^2 - 5t - 8 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 3\cdot 8}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6};$$

$$t_1 = 16/6 = 8/3; \qquad t_2 = -1.$$

$$\operatorname{tg} x = 2,(6) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \operatorname{arctg}(2,(6)) + \pi n, \; n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = (-\pi/4) + \pi k, \quad k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg}(2,(6)) + \pi n, \; n \in Z;$

$x_2 = (-\pi/4) + \pi k, \quad k \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{2}\sin^2 x \cos^2 x, \; x \in (-90\,°; 0\,°).$$

Решение. $$\sin^4 x - \frac{5}{2}\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = 0;$$

$$\operatorname{tg}^4 x - \frac{5}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0.$$

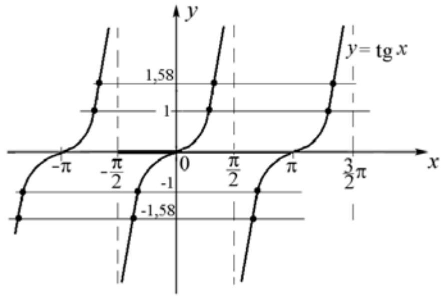
Заменим $\operatorname{tg} x = t$, тогда получим $2t^4 - 5t^2 + 2 = 0$ – получили биквадратное уравнение.

Обозначим $t^2 = z, \quad z > 0$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}.$$

$z_1 = 1;$
$z_2 = 2{,}5$



$t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \pm 1;$

$t^2 = 5/2 \Rightarrow t_{3,4} = \pm\sqrt{5/2}.$

$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = (\pi/4) + \pi n,$
$n \in Z;$

$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x_2 = (-\pi/4) + \pi k,$
$k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{5/2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \operatorname{arctg}\sqrt{5/2} + \pi l,\ l \in Z;$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{5/2} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \operatorname{arctg}\ -\sqrt{5/2}\ + \pi m,\ m \in Z.$

$x_1 \notin (-90°; 0°)$ для всех n;
$x_2 \in (-90°; 0°)$ при $k = 0$;
$x_3 \notin (-90°; 0°)$ для всех l;
$x_4 \in (-90°; 0°)$ при $m = 0$.

Ответ: $x = (-\pi/4)$; $x = \operatorname{arctg}\ -\sqrt{5/2}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\cos 3x + \sin 3x = 0,$ *Ответ*: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} n.$

2. $\sin 5x + \cos 5x = 0,$ *Ответ*: $x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{5} k.$

4. $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0,$

$$\textit{Ответ}: x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$x_2 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

4. $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x,$

$$\textit{Ответ}: x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

5. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0,$

$$\textit{Ответ}: x = -\frac{5\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Уравнения, приводящиеся к однородным

Неоднородное уравнение второго порядка, т.е. уравнение вида:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

приводится к однородному второго порядка, если вместо

$$d = d\cdot 1 = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Некоторые уравнения высшего порядка можно также свести к однородному, используя равенство: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Пример 1. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2$.

Решение. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

После приведения подобных членов получаем

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, переходим к квадратному уравнению относительно $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 5t + 6 = 0;\quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2};\quad t_1 = 3,\ \ t_2 = 2.$$

Следовательно, решение исходного уравнения сведено к решению простейших тригонометрических уравнений.

$\operatorname{tg} x = 3 \quad\Rightarrow\quad x_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;$

$\operatorname{tg} x = 2 \quad\Rightarrow\quad x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;$

$$x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение $2\sin^3 x = \cos x$.

Решение. Так как $\cos x = \cos x\,(\sin^2 x + \cos^2 x)$ для всех x, то данное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin^3 x = \cos x \sin^2 x + \cos^3 x,$$

однородному относительно $\sin x$ и $\cos x$ степени 3. Деля обе части уравнения на $\cos^3 x$ и обозначая $\operatorname{tg} x = t$, приходим к уравнению

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0.$$

Первый корень ищем подбором: $t = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$;
$t = 1 \Rightarrow 2 - 1 - 1 \equiv 0$, следовательно $t_1 = 1$ – корень уравнения.

$$\begin{array}{r|l}
-\,2t^3 - t^2 - 1 & t - 1 \\ \cline{2-2}
2t^3 - 2t^2 & 2t^2 + t + 1 \\ \cline{1-1}
-\,t^2 - 1 & \\
t^2 - t & \\ \cline{1-1}
-\,t - 1 & \\
t - 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Получаем $(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0$.

Поскольку $2t^2 + t + 1 > 0$ для любого t, то корень $t = 1$ является единственным.

$\operatorname{tg} x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $2\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 4$; *Ответ*: $x = \operatorname{arctg} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2. $4\cos^2 \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x + 3\sin^2 \dfrac{x}{2} = 3$;

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \pi(2n + 1),\ n \in Z$;

3. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$; *Ответ*: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

4. $3 - 7\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x = 0$;

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x_2 = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

5. $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$;

Ответ: $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Тригонометрические уравнения вида

R(sin kx, cos nx, tg mx, ctg lx) = 0, (5)

Здесь R – рациональная функция указанных аргументов (k, n, m, l – натуральные числа).

С помощью формул для тригонометрических формул суммы углов (в частности, формул двойного и тройного углов) можно свести к рациональному уравнению относительно аргументов sin x, cos x, tg x, ctg x. После чего уравнение (5) может быть сведено к рациональному уравнению относительно неизвестного $t = \operatorname{tg}(x/2)$ с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{2\operatorname{tg}(x/2)} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Пример 1. Решить уравнение $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$.

Решение. О.Д.З. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z.$

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$5\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} - 5\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x + 5, \qquad \operatorname{tg} x = t,$$

$$5\frac{2t}{1+t} - 5\frac{1-t^2}{1+t^2} = t + 5,$$

$$\frac{10t - 5 + 5t^2}{1+t^2} = t + 5,$$

$10t - 5 + 5t^2 = (t + 5)(1 + t^2),$
$10t - 5 + 5t^2 = t + 5 + t^3 + 5t^2,$
$t^3 - 9t + 10 = 0.$

Первый корень ищем подбором: $t_1 = 2 \quad \Rightarrow \; 8 - 18 + 10 \equiv 0$, следовательно $t_1 = 2$ – корень уравнения.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & t^3 - 9t^2 + 10 & t-2 \\ \cline{3-3}
 & t^3 - 2t^2 & t^2 + 2t - 5 \\ \cline{2-2}
- & 2t^2 - 9t & \\
 & 2t^2 - 4t & \\ \cline{2-2}
- & -5t + 10 & \\
 & -5t + 10 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$t_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 5}}{2} = -1 \pm \sqrt{6} = \sqrt{6} \pm 1,$$

$\operatorname{tg} x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z;$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{6} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - 1) + \pi m,\ m \in Z;$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{6} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} \pm 1) + \pi m,\ m \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos x + \operatorname{tg}(x/2) = 1$.

Решение. О.Д.З. $\dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z} \;\Rightarrow\; x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

Применяем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1,$$

$$\frac{1-t^2+t+t^3}{1+t^2} = 1,$$

$t^3 - t^2 + t + 1 = 1 + t^2$,

$t^3 - 2t^2 + t = 0$,

$t(t^2 - 2t + 1) = 0$,

$t(t-1)^2 = 0$,

$t_1 = 0$; $t_{2,\,3} = 1$.

Приходим к двум уравнениям:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1 = 2\pi k,\ k \in Z$;

Второе уравнение имеет корни $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Ответ: $x_1 = 2\pi k,\ k \in Z;\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$

Примеры для самостоятельного решения

Решить уравнения методом универсальной подстановки:

1. $\sin x + \operatorname{ctg}(x/2) = 2;$ *Ответ*: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z,$

2. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7;$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi k,\ \ k \in Z,\ \ \ x_2 = \pi n - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2},\ \ n \in Z.$

3. $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x;$

Ответ: $x_1 = \pi n,\ n \in Z,\ \ \ x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \ k \in Z;$
$x_3 = \pi m \pm \pi/3,\ \ m \in Z,$

4. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2} + \sin x = 2\cos x;$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2}(1 + 4k),\ \ k \in Z,$

5. $3\cos x + 4\sin x = 5;$

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Неоднородное уравнение первого порядка, т.е. уравнение вида

$$a\sin mx + b\cos mx = c. \tag{6}$$

Такие уравнения решаются различными способами. Рассмотрим два наиболее употребительных:

а) Первый способ основан на применении универсальной тригонометрической подстановки: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. При использовании универсальной подстановки функции $\sin x$, $\cos x$ выражаются через $\operatorname{tg}(x/2)$ по следующим формулам

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Функция $\operatorname{tg}(x/2)$ не существует для $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. $x \neq \pi + + 2\pi n$, $n \in Z$. Но $\sin x$ и $\cos x$ определены в этих точках. Поэтому необходимо всегда проверять корни $x = \pi + 2\pi n$ на решение отдельно.

б) Метод дополнительного угла.

В общем случае, для того чтобы преобразовать уравнение (6) к простейшему виду введением вспомогательного угла, разделим обе части на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin mx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos mx=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть φ – одно из этих решений системы

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{7}$$

$$\cos\varphi\sin mx+\sin\varphi\cos mx=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin(mx+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$mx+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$x=\frac{(-1)^n}{m}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi\frac{n}{m}-\frac{\varphi}{m},\ n\in Z,$$

угол φ определяется из (7).

Полученное уравнение, а значит и искомое имеет решения тогда и только тогда, когда $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Для преобразования уравнений вида (6) можно использовать также формулы синуса разности, косинуса суммы и разности аргументов.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Решим данный пример двумя способами

а) с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} = t$, получим уравнение, рациональное относительно t

$$\sqrt{3}\,\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

$$2\sqrt{3}t - 1 + t^2 = 1 + t^2,$$

$$2\sqrt{3}t = 2, \qquad t = 1/\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z.$$

Проверим теперь, не являются ли значения $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z$ корнями первоначального уравнения. (Напомним, что при этих значениях теряет смысл функция $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = t$).

Подставив $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z$ в исходное уравнение получим

$$\sqrt{3}\sin(2k+1)\pi - \cos(2k+1) = 1,$$

$$\sin(2k+1)\pi = 0, \qquad \cos(2k+1)\pi = -1,$$

$$1 \equiv 1$$

Следовательно, значения $x_2 = \frac{\pi}{3}(2k+1)$ являются корнями уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;\quad x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z.$

б) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1.$

В нашем случае $a = \sqrt{3};\ b = -1.$

Найдем $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$

Разделим все уравнение на 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Положим $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\varphi$ и $-\frac{1}{2} = \sin\varphi$, тогда уравнение примет вид

$$\sin(3x + \varphi) = 1/2,$$

$$3x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - \varphi,\ n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} - \frac{\varphi}{3},\ n \in Z,$$

где угол φ находится из системы $\begin{cases}\cos\varphi = \sqrt{3}/2;\\ \sin\varphi = -1/2.\end{cases}$

Следовательно, $\varphi = -\pi/6$. Тогда окончательный ответ

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{18},\ n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{18}((-1)^n + 1) + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

Множества решений этого уравнения полученные в пунктах а) и б), совпадают.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, *Ответ*: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x = 1$, *Ответ*: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

8. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения или разности

Пример.

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos 5x,$$

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos(2x + 3x),$$

$$\sin 3x \sin 2x = -\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x,$$

$$\cos 3x \cos 2x = 0,$$

$$\cos 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z;$$

$$\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n,\quad x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k,\ n, k \in Z.$

Уравнения, решаемые преобразованием тригонометрических сумм (разностей) в произведение

Пример 1. Решить уравнение:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Решение. Преобразуя сумму двух и сумму последних двух слагаемых левой части в произведение, получим

$$\cos 3x \cos x + \cos 7x \cos x = 0,$$

$$\cos x\,(\cos 3x + \cos 7x) = 0.$$

Применим еще раз формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$$2\cos x \cos 5x \cos 2x = 0,$$

$\cos x = 0 \Rightarrow \quad x_1 = (\pi/2) + \pi k, \quad k \in Z;$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow \quad x_2 = (\pi/4) + \pi n/2, \quad n \in Z;$

$\cos 5x = 0 \Rightarrow \quad x_3 = (\pi/10) + \pi m/5, \quad m \in Z.$

Ответ: $x_1 = (\pi/2) + \pi k$, $x_2 = (\pi/4) + \pi n/2$, $x_3 = (\pi/10) + \pi m/5$, $\quad k, n, m \in Z$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$,

Ответ: $x_1 = (\pi/2) + \pi n, \quad n \in Z$; $x_2 = 2\pi k, \quad k \in Z$;

$$x_3 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi m, \quad m \in Z.$$

2. Указать в градусах наименьший положительный корень

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0,$$

Ответ: 90 °.

3. $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0,$

Ответ: $x = (\pi/6) + (\pi/3)m, \quad m \in Z.$

Уравнения, решаемые понижением степени уравнения

Если в уравнении есть синус или косинус в четной степени, то степень уравнения может быть понижена с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$$

Решение. $\dfrac{1-\cos 6x}{2} + \dfrac{1-\cos 8x}{2} = \dfrac{1-\cos 10x}{2} + \dfrac{1-\cos 12x}{2},$

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x,$$

$$\cos 7x \cos x = \cos 11x \cos x,$$

$$\cos x\,(\cos 7x - \cos 11x) = 0,$$

$$\cos x \sin 9x \sin 2x = 0,$$

$\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = (\pi/2) + \pi n, \quad n \in Z;$

$\cos 9x = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \pi k/9, \; k \in Z;$

$\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = \pi m/2, \; m \in Z.$

Замечание. Первая серия корней (x_1) целиком входит в третью (x_3).

Ответ: $x_1 = \pi m/2, \; m \in Z; x_2 = \pi k/9, \; k \in Z.$

Пример 2. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1/9.$

Решение. $$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 4/9,$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4/9,$$

$$1 + \cos^2 2x = 2/9,$$

$$\cos^2 2x = (2/9) - (9/9),$$

$$\cos^2 2x = -7/9.$$

Данное уравнение решений не имеет.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1,$ *Ответ*: $x = (\pi/6) + \pi n/3, \; n \in Z.$
2. $\cos x - 2\sin^2 (x/2) = 0,$ *Ответ*: $x = \pm(\pi/3) + 2\pi n, \; n \in Z.$

Уравнения, решаемые преобразованием произведений в сумму или разность

Пример. Решить уравнение $\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x$.

Решение. Применим к левой и правой частям уравнения формулу $\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta))$. Получим:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x),$$

$$\cos 6x = \cos 2x,$$

$$\cos 6x - \cos 2x = 0.$$

Применив формулу для разности косинусов, получим уравнение

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0,$$

распадающееся на два уравнения

$\sin 4x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \pi n/4,\; n \in Z;$

$\sin 2x = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \pi m/2,\; m \in Z.$

Совокупность решений x_1 содержит совокупность решений x_2.

Ответ: $x = \pi n/4,\; n \in Z$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x,$

Ответ: $x_1 = \pi n, \quad n \in Z; \quad x_2 = \pi/6 + \pi k/3, \quad k \in Z.$

2. $\sin 5x \sin 4x = -\cos 6x \cos 3x$,

Ответ: $x_1 = \pi/4 + \pi k/2, \quad k \in Z; \quad x_2 = \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z.$

Уравнение вида R (sin x ± cos x, sin x cos x) = 0,

где R – рациональная функция указанных в скобках аргументов, может быть сведено к уравнению относительно неизвестного $t = \quad = \sin x \pm \cos x$, если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \pm 2\sin x \cos x,$$

из которого следует равенство

$$\sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Учитывая это равенство, первоначальное уравнение приводится к виду:

$$R\left(t,\ \pm \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0.$$

Решение. Обозначим $\sin x + \cos x = t$ и воспользуемся равенством $\sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Исходное уравнение сводится к следующему уравнению относительно t:

$$\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}},$$

$$t_1 = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \qquad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, решение, решение исходного уравнения сводится к решению двух тригонометрических уравнений:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}; \qquad \sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эти уравнения являются неоднородными первого порядка, решим их методом дополнительного угла.

Делим оба уравнения на $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1; \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=1; \qquad \cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=-\frac{1}{2}.$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=1; \qquad \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}.$$

$x + \pi/4 = \pi/2 + 2\pi n,\ \ n \in Z \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x + \pi/4 = (-1)^k \arcsin(-1/2) + \pi k,\ \ k \in Z \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = (-1)^{k+1}\ \pi/6 - \pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x_1 = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z;\ x_2 = (-1)^{k+1}\ \pi/6 - \pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0,$

Ответ: $x = 2\pi n \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4},\ \ n \in Z.$

2. $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x,$

Ответ: $x_1 = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = 2\pi m,\ m \in Z.$

Уравнения, решаемые различными формулами тригонометрии

Пример 1. Решить уравнение $\sin(2x - \frac{17}{2}\pi) = 1 + \sin x$.

Решение. Используя формулы приведения, преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin(2x - \frac{17\pi}{2}) = \sin(2x - 8\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x.$$

Учитывая, что cos $2x$ = 1 – 2sin $2x$, приводим уравнение к виду $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$,

$\sin x = t$, $t \in [-1, 1]$

$$2t^2 - t - 2 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx \frac{1 - 4{,}1}{4} = -0{,}8 > -1 \Rightarrow t_1 \in \text{О.Д.З.}$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx \frac{1 + 4{,}1}{4} > 1 \Rightarrow t_2 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n, \ \ n \in Z.$$

$$\textit{Ответ}: x = (-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\operatorname{tg}2\pi x = 1.$

В ответе указать число корней, принадлежащих промежутку [–3; 0].
Решение. Найдем область допустимых значений уравнения

$$\text{О.Д.З.}\begin{cases} \operatorname{tg}\pi x/2 \neq 0, \\ \operatorname{tg}2\pi x \neq 0, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi p, \ \ p \in Z, \\ 2\pi x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in Z. \end{cases} \begin{cases} \pi x/2 \neq \pi m, \ m \in Z, \\ 2\pi x \neq \pi k, \ k \in Z, \\ x \neq 1 + 2p, \ \ p \in Z, \\ x \neq 1 + \dfrac{l}{2}, \ \ l \in Z. \end{cases} \begin{cases} x \neq 2m, \ \ m \in Z, \\ x \neq k/2, \ \ k \in Z, \\ x \neq 1 + 2p, \ \ p \in Z, \\ x \neq \dfrac{1}{4} + \dfrac{l}{2}, \ \ l \in Z. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ \operatorname{tg} 2\pi x - \operatorname{tg} 2\pi x \operatorname{ctg} 2\pi x = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi x \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} - \operatorname{ctg} 2\pi \mathrm{x}\right) = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi x \neq 0, \quad \frac{\sin \pi x/2}{\cos \pi x/2} - \frac{\cos 2\pi x}{\sin 2\pi x} = 0,$$

$$\sin\frac{\pi x}{2}\sin 2\pi x - \cos 2\pi x\cos\frac{\pi x}{2} = 0,$$

$$-\cos\left(2\pi x + \frac{\pi x}{2}\right) = 0,$$

$$\cos((2 + ½)\pi x) = 0,$$

$$\cos(5/2)\pi x = 0,\ \ (5/2)\pi x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z,$$

$$x = (1/5) + (2/5)n,\ n \in Z.$$

1. $n = -1$: $x_1 = 1/5 - 2/5 = -1/5 \in [-3; 0]$, $x_1 \in$ О.Д.З.
2. $n = -2$: $x_2 = 1/5 - 4/5 = -3/5 \in [-3; 0]$, $x_2 \in$ О.Д.З.
3. $n = -3$: $x_3 = 1/5 - 6/5 = -5/5 = -1 \in [-3; 0]$, $x_3 \notin$ О.Д.З.
4. $n = -4$: $x_4 = 1/5 - 8/5 = -7/5 = -1{,}4 \in [-3; 0]$, $x_4 \in$ О.Д.З.
5. $n = -5$: $x_5 = 1/5 - 10/5 = -9/5 = -1{,}8 \in [-3; 0]$, $x_5 \in$ О.Д.З.
6. $n = -6$: $x_6 = 1/5 - 12/5 = -11/5 = -2{,}2 \in [-3; 0]$, $x_6 \in$ О.Д.З.
7. $n = -7$: $x_7 = 1/5 - 14/5 = -13/5 = -2{,}6 \in [-3; 0]$, $x_7 \in$ О.Д.З.
8. $n = -8$: $x_8 = 1/5 - 16/5 = -15/5 = -3 \in [-3; 0]$, $x_8 \notin$ О.Д.З.

Ответ: 6 корней.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x\cos 2x.$$

Решение.

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x = \sin 2x\cos 2x,$$

$$2\sin^2 2x\cos^2 2x + \sin 2x\cos 2x - 1 = 0.$$

Обозначим $\sin 2x \cos 2y = y$, тогда последнее уравнение примет вид:

$$2y^2 + y - 1 = 0, \quad \text{или} \quad 2(y + 1)(y - 1/2) = 0.$$

Перейдем к переменной x и будем иметь:

1. $\sin 2x \cos 2x = -1$,

   $2\sin 2x \cos 2x = -2$,

   $\sin 4x \neq -2 \;\Rightarrow$ уравнение решений не имеет $x \in \varnothing$.

2. $\sin 2x \cos 2x = 1/2$,

   $\sin 4x = 1$,

   $4x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$,

   $x = \pi/8 + (\pi/2)n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \pi/8 + (\pi/2)n,\ n \in Z$.

Пример 4. Решить уравнение $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi \cdot 3^x}{1 + 3^x}\right) = \sqrt{3}$.

Решение. $$\frac{\pi \cdot 3^x}{1 + 3^x} = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\frac{3^x}{1 + 3^x} = \frac{1}{3} + n,$$

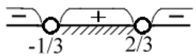
$$3 \cdot 3^x = (1 + 3^x)(1 + 3n),$$

$$3 \cdot 3^x = 1 + 3^x + 3n(1 + 3^x),$$

$$2 \cdot 3^x - 3n \cdot 3^x = 1 + 3n,$$

$$3^x = \frac{1+3n}{2-3n}; \qquad 3^x > 0.$$

$$\frac{1+3n}{2-3n} > 0, \qquad -\frac{1}{3} < n < \frac{2}{3}, \quad n \in Z.$$



Следовательно, $n = 0$.

$3^x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = \log_3 (1/2) = -\log_3 2.$

Ответ: $x = -\log_3 2$.

Тригонометрические уравнения решаемые с использованием оценок (использование ограниченности функций sin x, cos x)

Пример 1. Решить уравнение $\sin(\pi \sin x) = -1$.

Решение. $\pi \sin x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z,$

$$\sin x = -1/2 + 2k, \text{ т.е. } -1 \le \sin x \le 1, \text{ то}$$

$$-1 \le -1/2 + 2k \le 1$$

$$-1/2 \le 2k \le 3/2,$$

$$-1/4 \le k \le 3/4 \quad \Rightarrow \quad k = 0, \text{ т.к. } k \in Z.$$

Следовательно, $\sin x = -1/2$,

$$x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

Решение. Так как $|\sin 7x| \le 1$, $|\cos 2x| \le 1$, то исходное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases}\sin 7x = -1,\\ \cos 2x = -1.\end{cases} \quad \begin{cases}7x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z,\\ 2x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.\end{cases} \quad \begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2}{7}\pi n,\ n \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z.\end{cases}$$

Решением системы, а, следовательно, и исходного уравнения, являются те значения x, которые принадлежат как первому, так и второму множеству. Для того чтобы найти эти значения, приравняем выражения, стоящие в правых частях уравнений системы. Если найдутся целые значения n и m, при которых эти выражения совпадают, то полученные значения x удовлетворяют обоим уравнениям системы.

$$-\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$m=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}n,\qquad m=\frac{2n-4}{7}=\frac{2(7l+2)-4}{7}=2l,\quad l\in Z,$$

где n положили равным $n = 7l + 2$.

Найденные значения n и m

$$n=(7l+2)\ \in Z,$$
$$m=2l\in Z$$

подставим в систему

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{2}{7}\pi(7l+2)=\dfrac{7}{14}\pi+2\pi l=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l. \end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z$.

Пример 3. Решить уравнение: $\sin x + \sin 3x = 2$.

Решение. С учетом ограниченности функций $\sin x$, $\sin 3x$, исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\sin x = 1,\\ \sin 3x = 1.\end{cases}\qquad \begin{cases}x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z,\\ 3x = \pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z.\end{cases}\qquad \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,\\[2ex] x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi m,\ m \in Z.\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{12} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi m,$$

$$\frac{1}{2} + 2n = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}m,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}m - 2n,\qquad \frac{1}{3} = \frac{2m - 6n}{3},\qquad 1 = 2m - 6n.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений в целых числах, так как при любых n и m справа стоит четное число, а слева нечетное. Таким образом, уравнения системы не имеют общих точек и исходное уравнение решения не имеет.

Пример 4. Решите уравнение: $2^{|\cos 2x|} = \dfrac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}}$.

Решение. $$2^{|\cos 2x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x,$$

$$2^{|\cos 2x|} = \sin 3x \cos\frac{\pi}{4} - \cos 3x \sin\frac{\pi}{4},$$

$$2^{|\cos 2x|} = \sin(3x - \frac{\pi}{4}).$$

Так как $-1 \le \sin(3x - \pi/4) \le 1$, а

$$1 \le 2^{|\cos 2x|} \le 2,$$

то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|\cos 2x|} = 1, \\ \sin(3x - \pi/4) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin(3x - \pi/4) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi/2 + \pi n, \ n \in Z, \\ 3x = \pi/4 + \pi/2 + 2\pi k, \ k \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi/4 + \pi n/2, \ n \in Z, \\ x = \pi/4 + (2/3)\pi k, \ k \in Z. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k,$$

$$\frac{n}{2} = \frac{2k}{3} \ \Rightarrow \ k = 3l, \ l \in Z \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} k = 3l \\ n = 4l \end{matrix}\right\} \in Z,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} 4l, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{3} \pi 3l, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi l. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi/4 + 2\pi l,\ \ l \in Z$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $2\cos 2x + \sin (5x/2) = 3$, *Ответ*: $x = \pi + 4\pi m,\ m \in Z$.
2. $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos (12x/5) = 5 - 3\cos^2 x$,

Ответ: $x = -(5/6)\pi + 5\pi k,\ k \in Z$.

3. $\cos \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} x \cos \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} x = 1$, *Ответ*: $x = 0$.
4. $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$, *Ответ*: $x = \pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z$.
5. $\sin (x/2) \cos 2x = 1$, *Ответ*: $x = \pi + 4\pi m,\ m \in Z$.
6. $\sin^4 x + 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$,

Ответ: $x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z$.

7. $\sin 2x(3\sin 2x - \cos (x/2) = \cos 2x(2 + \sin (x/2) - 3\cos 2x)$, в ответ записать решение, удовлетворяющее условию $0\,° < x \le 180\,°$.

Ответ: $180\,°$.

8. $\sin^2 x - 1 + \sin^2 3x - 2\sin 3x - \sin x = -9/4$,

Ответ: $x_1 = \pi/6 + 2\pi l$, $x_2 = -(7/6)\pi + 2\pi l$, $l \in Z$.

9. $2^{\cos^4 2x + 1/2} = \sin 3x - \cos 3x$, *Ответ*: $x = \pi/4 + 2\pi m$, $m \in Z$.

10. $\dfrac{12\sin^2 \pi x}{1 + 2^{\sin \pi x}} = |3x + 7| + 3\sqrt{x^2 + 10x + 25}$,

Ответ: $x = -5/2$, $x = -9/2$.

11. $(\cos\dfrac{x}{4} - 2\sin x)\sin x + (1 + \sin\dfrac{x}{4} - 2\cos x)\cos x = 0$,

Ответ: $x = -2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

11. $\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)\sin x+\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)\cos x=0,$

Ответ: $x = -2\pi + 8\pi m,\ m \in Z$.

Тригонометрические уравнения с параметром

Пример 1. При каком значении k уравнение

$$\frac{1}{3}\sqrt{17+8\cos x-16\sin^2 x}-\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$$

имеет решение?

Решение. Преобразуем выражение:

$$\frac{1}{3}\sqrt{17+8\cos x-16\sin^2 x}=\frac{1}{3}\sqrt{17+8\cos x-16(1-\cos^2 x)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{17+8\cos x+16+16\cos^2 x}=\frac{1}{3}\sqrt{(4\cos x)^2+8\cos x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(4\cos x+1)^2}=\frac{1}{3}\left|4\cos x+1\right|=\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|.$$

Следовательно, $\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|-\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k \quad \Rightarrow \quad k=0.$

Уравнение будет непротиворечиво, только при $k = 0$ (тогда оно обращается в тождество).

Ответ: $k = 0$.

Пример 2. При каких значениях k уравнение

$$\frac{1}{3}\sqrt{17+8\cos x-16\sin^2 x}+\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$$

имеет решение?

Решение.
$$\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|+\frac{4}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$$

$$\frac{8}{3}\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k \Rightarrow \text{О.Д.З.} \quad k\ge 0.$$

$$\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{8}k, \qquad \cos x=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{8}k, \text{ т.к. } -1\le\cos x\le 1, \text{ то}$$

$$-1\le -1/4\pm(3/8)k\le 1,$$
$$-8\le -2\pm 3k\le 8,$$
$$-6\le \pm 3k\le 10.$$

При знаке «+» имеем: $-6\le 3k\le 10,$

$$-2\le k\le 10/3,$$

$$-2 \le k \le 3,(3),$$

т.к. $k \ge 0$, то $k \in [0;\ 10/3]$.

При знаке «–» имеем: $$-10 \le 3k \le 6,$$

$$-3,(3) \le k \le 2,$$

т.к. $k \ge 0$, то $\mathrm{k} \in [0;\ 2]$.

Объединением двух множеств есть множество:

$$[0;\ 10/3] \cup [0;\ 2] = [0;\ 10/3].$$

Ответ: $k \in [0;\ 3,(3)]$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти все целые значения k, при каждом из которых уравнение: $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 (x/2) = 3k$ имеет решение. В ответ записать наибольшее k.

Ответ: 1.

2. Найти все целые значения k, при которых уравнение:

$$\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

имеет решение. Найти эти решения.

Ответ: $k = 4l,\ l \in Z;\ x = \pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z$.

Иррациональные тригонометрические уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} - 2\cos x = 0.$$

Решение. $\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} = 2\cos x.$

Следовательно, $\cos x \geq 0 \Rightarrow\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right].$

Возводим уравнение в квадрат

$$4\cos 2x - 2\sin 2x = 4\cos^2 x,$$

$$4\cos 2x - 2\sin 2x = 4\frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$4\cos 2x - 2\sin 2x = 2 + 2\cos 2x,$$

$$2\cos 2x - 2\sin 2x = 2,$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 1.$$

Воспользуемся методом дополнительного угла

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Разделим все уравнение на $\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\sin(2x + \frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2x + \frac{3}{4}\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2} n.$$

При n – четном ($n = 2l,\ l \in Z$)

$$x_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}2l = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\quad l \in Z.$$

При n – нечетном ($n = 2l + 1,\ l \in Z$)

$$x_2 = -\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}2l + \frac{\pi}{2} = \pi l,\quad l \in Z.$$

С учетом того, что $\cos x \geq 0$:

$x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l,\quad x_2 = 2\pi l,\ l \in Z.$

Ответ: $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \quad x_2 = 2\pi l,\ l \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x + \cos^2 x + 4} = -\sqrt{10}\cos x.$$

Решение. Из вида уравнения заключаем, что $\cos x \le 0$ (I, III четверти). Возводим в квадрат:

$$12\sin x + \cos^2 x + 4 = 10\cos^2 x,$$

$$12\sin x - 9\cos^2 x + 4 = 0,$$

$$12\sin x - 9(1 - \sin^2 x) + 4 = 0,$$

$$9\sin^2 x + 12\sin x - 5 = 0.$$

Обозначим $\sin x = t,\ t \in [-1; 1]$

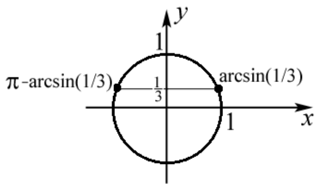
$$9t^2 + 12t - 5 = 0,$$

$$t_1 = -5/3 \notin [-1; 1], \quad t_2 = 1/3 \in [-1; 1].$$

$\sin x = 1/3 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin(1/3) + \pi k, \quad k \in Z.$

При k – четном ($k = 2l,\ l \in Z$)

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$



При k – нечетном ($k = 2l + 1,\ l \in Z$)

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

С учетом того, что $\cos x \le 0$, заключаем

$$x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi l,\ l \in Z.$$

Ответ: $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi l,\ \ l \in Z.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\sqrt[3]{2 - \operatorname{tg} x} + \sqrt{7 + \operatorname{tg} x} = 3,$

Ответ: $x_1 = -\operatorname{arctg} 6 + \pi k,\ k \in Z,\ \ x_2 = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

2. $\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}(1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2\cos x} - \sqrt{\sin 2x},$

Ответ: $x_1 = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z,\ \ x_2 = \pi/3 + 3\pi m,\ m \in Z.$

3. $\sqrt{4 + 3\cos x - \cos 2x} = \sqrt{6}\sin x,$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = \arccos(1/4) + 2\pi m,\ m \in Z.$

4. $\sqrt{4\sin x + \cos 2x + 5} = 2\sqrt{2}\cos x,$

Ответ: $x_1 = -\pi/2 + 2\pi m,\ m \in Z,\ \ x_2 = \arcsin(1/3) + 2\pi l,\ l \in Z.$

5. $(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0,$

Ответ: $x_1 = \pi/6 + 2\pi k,\ k \in Z,\ \ x_2 = \pi n,\ n \in Z.$

6. $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0,$

Ответ: $x_1 = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = -(2/3)\pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

7. $\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} - 2\cos x = 0,$

Ответ: $x_1 = 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$

8. $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x},$

Ответ: $x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

9. $\sqrt{1 + 3\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg} x}} = \dfrac{5}{2},$

Ответ: $x_1 = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = -\arccos 4 + \pi m,\ m \in Z.$

10. $\sqrt{3 + 2\sin x - 2\cos x} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x),$

Ответ: $x_1 = -\pi/6 + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x_2 = \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z.$

11. $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x,\ \ x \in [\pi; 3\pi],$

Ответ: $2\pi;\ 5\pi/2.$

Тригонометрические уравнения содержащие модуль

Пример 1. $\cos x = |\sin x|.$

Решение 1. 1) $\sin x \geq 0,\ \ \cos x = \sin x \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} x = 1,\ \ x = \pi/4 + \pi n,$

т. к. $\sin x \geq 0$, то $x_1 = \pi/4 + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

2) $\sin x < 0,\ \ \cos x = -\sin x \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} x = -1,\ \ x = -\pi/4 + \pi n,$

т. к. $\sin x < 0$, *то* $x_2 = -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z;\ x_2 = -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решение 2. Запишем уравнение в виде $\cos x - |\sin x| = 0$ и будем искать его корни на отрезке $[0; \pi]$. На этом отрезке его можно записать в виде $\cos x = \sin x$, и его единственным корнем является $\pi/4$. Так как функция $f(x) = \cos x - |\sin x|$ четная, то на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение имеет решения $\pi/4$ и $-\pi/4$. Так как $f(x)$ имеет период 2π, то она обращается в 0 в точках

$$\pi/4 + 2\pi k \quad \text{и} \quad -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решение 3. Синус и косинус угла равны по модулю, если соответствующая точка единичной окружности лежит на биссектральном диаметре. Так как косинус должен быть неотрицательным, то данному уравнению удовлетворяют углы

$$\pi/4 + 2\pi k \quad \text{и} \quad -\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x = |\cos x|$.

Решение. $\sqrt{3}\sin x = |\cos x| \iff \begin{cases} 3\sin^2 x = \cos^2 x, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

$$3\sin^2 x = 1 - \sin^2 x \;\Leftrightarrow\; 4\sin^2 x = 1.$$

Учитывая неравенство $\sin x \ge 0$, *получаем*

$$\sin x = 1/2, \text{ т.е. } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение $|\cos x| = \cos x - 2\sin x.$

Решение. Данное уравнение распадается на две системы

$$\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \sin x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pi n,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \cos x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0, \\ \mathrm{tg} x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_2 =$$

$$(5/4)\pi + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Ответ: $x_1 = 2\pi n,\ n \in Z;\ x_2 = (5/4)\pi + 2\pi m,\ m \in Z.$

Пример 4. Решите уравнение: $\sin x = \mathrm{tg}\, x\, |\sin x|.$

Решение. 1) $\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi n,\ n \in Z;$

2) $\sin x > 0 \Rightarrow tg\, x = 1 \Rightarrow x_2 = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$

Из этих углов условию $\sin x > 0$ *удовлетворяют только*

$$x_2 = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$$

3) $\sin x < 0 \Rightarrow tg\, x = -1 \Rightarrow x_3 = -\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z.$

Ответ: $x_1 = \pi n,\ n \in Z;\ x_{2,\,3} = \pm\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$,

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/2 + 2\pi n,\ x_2 = -\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2. $|\mathrm{tg}\, x| = \mathrm{tg}\, x - \dfrac{1}{\cos x}$,

$$\text{Ответ: } x = 5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in Z.$$

3. $\cos x = |\cos x|\,(x + 1{,}5)^2$,

$$\text{Ответ: } x_1 = -0{,}5,\ x_2 = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z.$$

4. $3\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}\,|\sin x|$, Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z.$

5. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x = 3\,|\cos x|$,

$$\text{Ответ: } x_1 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$x_2 = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n,\ n \in Z,\ x_3 = \pi/2 + \pi m,\ m \in Z.$$

6. $2\sin^2 x = |\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x|$, Ответ: $x = \pi k,\ k \in Z.$

7. $\cos x = \mathrm{tg}\, x\,|\cos x|$,

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z,\ x_2 = 3\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z.$$

8. $|\cos x|\,(2x - 4) = |x - 2|$,

$$\text{Ответ: } x_1 = 2,\ x_2 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ \ k \geq 1,\ k \in Z,$$

$x_3 = 2\pi/3 + 2\pi m,\ m \geq 0,\ m \in Z,\ x_4 = -2\pi/3 + 2\pi n,\ n \geq 1,\ n \in Z.$

9. $|tg\, x|\,(x + 3) = |x + 3|,$

Ответ: $x_1 = -3,\ x_2 = \pi/4 + \pi k,\ \ k \geq -1,\ k \in Z,$

$x_3 = -\pi/4 + \pi k,\ k \geq 0,\ k \in Z.$

10. $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\,,$ *Ответ:* $x = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z.$

11. $|\sin |x| \cos x| \cdot |3 - 4\sin^2 x| \cdot |4\cos^2 x - 3| = 1/2,$

Ответ: $x = \pi/12 + \pi n/6,\ n \in Z.$

12. $\sin^2 x = \cos x \cdot |\sin x|,$

Ответ: $x_1 = \pi k,\ k \in Z,\ x_2 = \pm\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z.$

13. $2\sin^2 x = |\sin x|,$

Ответ: $x_1 = \pi n,\ n \in Z,\ x_{2,\,3} = \pm\pi/6 + \pi k,\ k \in Z.$

Уравнения, содержащие переменные под знаком аркфункции

Решение простейших уравнений

Уравнение	Решение
$\arcsin x = a, \quad \lvert a \rvert \le \pi/2$	$x = \sin a$
$\mathrm{Arccos}\, x = a, \; 0 \le a \le \pi$	$x = \cos a$
$\mathrm{arctg}\, x = a, \quad \lvert a \rvert \le \pi/2$	$x = \mathrm{tg}\, a$
$\mathrm{arcctg}\, x = a, \; 0 < a < \pi$	$x = \mathrm{ctg}\, a$

1. Уравнения вида $P(y(x)) = 0$, где P – некоторая рациональная функция, а $y(x)$ – одна из аркфункций сводятся к простейшим уравнениям

$$y\,(x) = y_i,$$

где y_i – корни уравнения $P(y) = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0.$$

Решение. Обозначим за $y = \arcsin x$, получим уравнение

$$2y^2 - y - 6 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}, \ y_1 = 2; \ y_2 = -3/2.$$

Следовательно, решение исходного уравнения сводится к решению двух простейших уравнений:

$\arcsin x = 2$ $\qquad 2 > \pi/2 \approx 1{,}6,$

$\arcsin x = -3/2$ $\qquad |-3/2| < \pi/2.$

Таким образом, единственным решением будет

$$x = \sin(-3/2) = -\sin(3/2).$$

Ответ: $x = -\sin(3/2)$.