

**Показательные и логарифмические  
уравнения, неравенства  
и их системы**

**Учебное пособие для абитуриентов**

**Томск 2004**



## I. Логарифмы и их свойства

Пусть число  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Число  $x$  называется *логарифмом* числа  $N$  по основанию  $a$ , если  $a^x = N$ , обозначают  $x = \log_a N$ . Для обозначения десятичных логарифмов используют запись  $\log_{10} N = \lg N$ , а для обозначения натуральных логарифмов  $\log_e N = \ln N$ .

Прежде всего отметим основное логарифмическое тождество:  
 $a^{\log_a N} = N$ , справедливое для любых  $N$  и  $a$  таких, что  $N > 0$ ;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Отметим свойства логарифмов, часто употребляемые при решении задач:

1.  $\log_a a = 1$ ;
2.  $\log_a 1 = 0$ ;
3.  $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ,  $(M > 0; N > 0)$ ;
4.  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ,  $(M > 0; N > 0)$ ;
5.  $\log_a M^\beta = \beta \log_a M$ ,  $(M > 0)$ ;
6.  $\log_a M = \log_{a^n} M^n$ ,  $(M > 0)$ ;
7.  $\log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N$ ,  $(N > 0)$ ;

$$8. \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \quad (N > 0);$$

$$9. \log_b a \cdot \log_a b = 1;$$

$$10. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad (a > 0, c > 0);$$

$$11. \log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N, \quad (N > 0).$$

Рассмотрим несколько примеров на использование основных свойств логарифмов. Навыки работы с логарифмическими и показательными выражениями являются обязательными для решения показательных и логарифмических уравнений неравенств и систем.

**Пример 1.** Вычислить  $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$ .

*Решение:* Используя свойства логарифмов, решаем

$$\log_3 \log_4 4^{1/9} = \log_3 \left( \frac{1}{9} \log_4 4 \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3 = -2.$$

Ответ: -2.

**Пример 2.** Вычислить  $\left( 27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 9} \right) \left( 81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9} \right)$ .

*Решение:* Учитывая свойства логарифмов, решаем

$$\begin{aligned} & \left( 27^{\log_3 2} + 5^{\log_5 3} \right) \left( 81^{\log_9 4} - 2^{3 \log_2 3} \right) = \\ & = \left( 3^{3 \log_3 2} + 3 \right) \left( 3^{4 \log_3 2} - 2^{\log_2 3^3} \right) = \\ & = \left( 3^{\log_3 2^3} + 3 \right) \left( 3^{\log_3 2^4} - 3^3 \right) = \\ & (8 + 3)(16 - 27) = 11 \cdot (-11) = -121. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Вычислить  $\log_6 16$ , если  $\log_{12} 27 = a$ .

*Решение:* Применяя последовательно формулы (5), (9) и (3), получаем

$$\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{4}{1 + \log_2 3}.$$

Теперь видно, что для определения  $\log_6 16$  нам надо знать, чему равен  $\log_2 3$ .

Найдем его из условия  $\log_{12} 27 = a$ . Применяя последовательно формулы (5), (9), (3) и (5), (9), имеем цепочку преобразований

$$a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3}{1 + \frac{2}{\log_2 3}} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Следовательно,  $\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$ .

Окончательно имеем  $\log_2 16 = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}$ .

**Примеры для самостоятельного решения**

Вычислить:

- |   |      |  |      |
|---|------|--|------|
| 1. $\log_2 16$ ;  | [4]  | 7. $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$ ;               | [2]  |
| 2. $\log_3 \frac{1}{81}$ ;  | [-4] | 8. $10^{1+\lg 3}$ ;  | [30] |
| 3. $\log_{0,2} 0,4$ ;   | [2]  | 9. $\frac{1}{3} \left( 1 + 9^{\log_9 7} \right)^{\log_8 3}$ ;  | [1]  |
| 4. $\log_{\sqrt{3}} 1$ ;  | [0]  | 10. $2^{2-\log_2 5} + \left( \frac{1}{2} \right)^{\log_2 5}$ ; | [1]  |
| 5. $\log_4 2 + \log_4 8$ ;  | [2]  | 11. $\log_3 8 - 2 \log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2}$ ;             | [2]  |
| 6. $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3}$ ;   | [1]  | 12. $\log_3^2 \log \frac{1}{5} \frac{1}{125}$ ;                | [1]  |
| 13. $\log_3 [(\log_2 5)(\log_5 8)]$   | [1]  |  |      |
| 14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + \left( \sqrt{7} \right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}} + 125^{\log_{25} 6}$ ; |      | $[650 + 6\sqrt{6}]$  |      |

$$15. \left( 2^{2+\frac{1}{\log_5 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_2 5}} + 3 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad [5]$$

$$16. 27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_5 2} \cdot \log_2 16; \quad [1]$$

$$17. \left( 3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 7^{\log_7 49} \right)^{1/2}; \quad [7]$$

$$18. \text{Зная, что } \lg 2 = a, \log_2 7 = b, \text{ найти } \lg 56. \quad [a(b+3)]$$

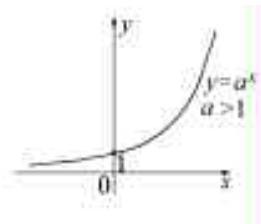
$$19. 3^{\sqrt{\log_3 2}}; \quad [1/2]$$

## II. Показательная функция, ее свойства и графики

Функция, заданная формулой вида  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  называется *показательной*.

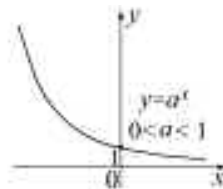
1. Функция  $y = a^x$  при  $a > 1$  обладает следующими свойствами:

- область определения  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;
- область значения  $y \in (0; +\infty)$ ;
- функция возрастающая;
- если  $x > 0$ , то  $a^x > 1$ ;  
 $x = 0$ , то  $a^x = 1$ ;  
 $x < 0$ , то  $0 < a^x < 1$ .



2. Функция  $y = a^x$  при  $0 < a < 1$  обладает следующими свойствами:

- область определения  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;
- область значения  $y \in (0; +\infty)$ ;
- функция убывающая;
- если  $x > 0$ , то  $0 < a^x < 1$ ;  
 $x = 0$ , то  $a^x = 1$ ;  
 $x < 0$ , то  $a^x > 1$ .





### Основные свойства степеней

$$1. a^x a^y = a^{x+y};$$

$$4. (a^x)^y = a^{xy};$$

$$7. 1^x = 1;$$

$$2. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$5. a^0 = 1;$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$3. a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$6. a^1 = a;$$

$$9. (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$

Уравнение называют *показательным*, если оно содержит степень, показатель которой включает неизвестную величину, а основание степени известно.

**Типы показательных уравнений:**

**1. Уравнение вида:**  $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0.$

*Пример.*  $5^{(x-2)(4x-3-x^2)} = 1.$

*Решение:*  $5^{(x-2)(-x^2+4x-3)} = 5^0$

$$(x-2)(-x^2+4x-3) = 0$$

$$x-2 = 0; \quad -x^2+4x-3 = 0;$$

$$x_1 = 2. \quad x^2-4x+3 = 0;$$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1;$$

$$x_2 = 1; \quad x_3 = 3.$$

*Ответ:*  $\{1, 2, 3\}$

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $3^{x^2-5x+6} = 1;$   $[x_1 = 2, x_2 = 3]$

2.  $4^{(1-x)(x^2-5x+6)} = 1;$   $[x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3]$

3.  $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1;$   $[x = 3/5]$

4.  $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = 1;$   $\left[x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{193}}{4}\right]$

5.  $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2};$   $[x_{1,2} = \pm\sqrt{3}]$

## 2. Уравнение вида $a^{f(x)} = b$ .

Его решением при  $a > 0$  и  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ , является  $f(x) = \log_a b$ .

В частности, если  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ , то  $x = \log_a b$ .

*Пример 1.* Решить уравнение  $2^{4x} = 5$ .

*Решение:* Обе части уравнения положительны, логарифмируем по основанию 2

$$\log_2 2^{4x} = \log_2 5,$$

$$4x \cdot \log_2 2 = \log_2 5,$$

$$4x = \log_2 5,$$

$$x = \frac{\log_2 5}{4}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\log_2 5}{4}.$$

*Пример 2.* Решить уравнение  $7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 4$ .

*Решение:* Возведем правую и левую части уравнения в квадрат

$$\left( 7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x \right)^2 = 4^2,$$

$$7^x 3^{2x} = 16,$$

$$7^x 9^x = 16,$$

$$\begin{aligned}63^x &= 16, \\ \log_{63} 63^x &= \log_{63} 16, \\ x &= \log_{63} 16.\end{aligned}$$

*Ответ:*  $x = \log_{63} 16$ .

### **Примеры для самостоятельного решения**

1.  $5 \cdot 2^x = 3;$        $[\log_2 \frac{3}{5}]$

2.  $6^{\frac{x}{3}} \cdot 2^x = 5;$        $[3 \log_{48} 5]$

**3. Уравнения, приводящие к простейшему виду**  $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ ,  $a \neq 1$ , что равносильно  $f(x) = \varphi(x)$ .

*Пример 1.* Решить уравнение  $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ .

*Решение:* Заметим, что  $\frac{7}{3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$  и перепишем исходное уравнение в виде:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3},$$

$$3x - 7 = -7x + 3,$$

$$10x = 10,$$

$$x = 1.$$

*Ответ:*  $x = 1$ .

*Пример 2.* Решить уравнение  $0,125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ .

*Решение:* Преобразуем уравнение с основанием 2. Получим

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-1/2}\right)^{-x},$$

или

$$\begin{aligned}2^{-3} \cdot 2^{2(2x-8)} &= \left(2^{-2} \cdot 2^{-1/2}\right)^x, \\2^{-3+2(2x-8)} &= 2^{(-2-0,5)(-x)}, \\2^{-3+4x-16} &= 2^{2,5x}, \\-3 + 4x - 16 &= 2,5x, \\(4 - 2,5)x &= 19, \\x &= \frac{19}{1,5} = \frac{19 \cdot 2}{3} = \frac{38}{3}.\end{aligned}$$

Ответ:  $x = 38/3$ .

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x^2 - 6x + 9} + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{x^2 - 6x + 9} - 6.$$

Решение: Заметим, что числа  $3 - 2\sqrt{2}$  и  $3 + 2\sqrt{2}$  обратны по величине

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Поэтому, обозначив  $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2 - 6x + 9} = t$ ,  $t > 0$ , перепишем исходное уравнение в виде  $t + \frac{1}{t} = 6$ ,

$$t^2 - 6t + 1 = 0,$$
$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{32}}{2} = 3 \pm \sqrt{\frac{32}{4}} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Равенства  $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2 - 6x + 9} = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  
 $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2 - 6x + 9} = 3 - 2\sqrt{2}$

приводят к двум квадратным уравнениям относительно  $x$ :

$$x^2 - 6x + 9 = -1, \quad x^2 - 6x + 9 = 1.$$

Первое из них имеет мнимые корни, второе же дает два решения уравнения

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2.$$

*Ответ:*  $x_1 = 4, x_2 = 2$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2^{x+5};$

$[x = -1]$



$$2. 3^{\frac{2-x}{x-5}} = \frac{1}{9}; \quad [x = 8]$$

$$3. 3^{\frac{5-2x}{x+1}} = \frac{1}{27}; \quad [x = -8]$$

$$4. \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} = 225; \quad [x = 4]$$

$$5. \sqrt{27^{2x+6}} = \sqrt[3]{9^{4x+3}}; \quad [x = -21]$$

$$6. 125 \cdot \sqrt[3]{0,2} = 25^x; \quad [x = 1]$$

$$7. 5 \cdot 2^{x^2-x-1} - 5^{x^2-x} = 0; \quad \left[ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right]$$

$$8. 4^{4(x+1)} = \sqrt[5]{16^{x+100}}; \quad [x = 10]$$

$$9. 5^{|4x-6|} = 25^{2x-4}; \quad [x \in \emptyset]$$

$$10. \left( \sqrt{7 + \sqrt{48}} \right)^x + \left( \sqrt{7 - \sqrt{48}} \right)^x = 14; \quad [x_1 = 2, x_2 = -2]$$

$$11. \left( \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^x + \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^x = 4; \quad [x_1 = 2, x_2 = -2]$$

$$12. \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10; \quad [x_1 = 2, x_2 = -2]$$

$$13. 5^{2+4+6+\dots+2x} = 0,04^{-23}, \text{ где } x > 0; \quad [x = 7]$$

$$14. 5 \cdot (0,04)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{0,5 \sin 2x}; \quad [x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}]$$

$$15. 3^{8x^2 \operatorname{ctg} \pi x + 15x \operatorname{ctg} \pi x} = 3^{2 \operatorname{ctg} \pi x}; \quad [x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}]$$

$$16. 3^{1+\sin x+\dots+\sin^n x+\dots} = \sqrt[3]{9}; \quad \left[ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$17. 2^{-1+\cos x - \cos^2 x + \dots + (-1)^{n+1} \cos^n x + \dots} = \sqrt[3]{0,25}; \quad \left[ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$18. \left(\sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4}\right) = 13,5; \quad [x = 3]$$

$$19. \sqrt{5} \cdot 0,2^{\frac{1}{2x}} - 0,04^{1-x} = 0; \quad [x_1 = 1, x_2 = 0,25]$$

$$20. \sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}; \quad [x_1 = -0,2, x_2 = 3]$$

$$21. \sqrt{2} \cdot 0,5^{\frac{5}{4\sqrt{x+10}}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x+1})}} = 0;$$

$$[x = 25]$$

$$22. 2,5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}} \cdot 0,4^{1-\sqrt{9-x}} = 5^{10} \cdot 0,1^5;$$

$$[x_1 = 8, x_2 = -7]$$

#### 4. Уравнения, приводящие к алгебраическим путем введения новой переменной (метод подстановки).

*Пример 1.* Решить уравнение:  $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ .

*Решение:* Запишем исходное уравнение в виде

$$5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 - 250 = 0.$$

Сделаем замену:  $5^x = t, t > 0$ .

$$\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0,$$

$$t_1 = -50 \notin \text{О.Д.З.}$$

$$t_2 = 25 \in \text{О.Д.З.}$$

$$5^x = 25, \quad 5^x = 5^2, \quad x = 2.$$

*Ответ:*  $x = 2$ .

*Пример 2.* Решить уравнение:  $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ .

*Решение:* О.Д.З.  $x^2 - 2 \geq 0$ ,

$$x^2 \geq 2, \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

Сделаем замену:  $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = t, \quad t > 0$ .

Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0,$$

корнями которого будут

$$t_1 = 4 \in (0; +\infty),$$

$$t_2 = -3/2 \notin (0; +\infty).$$

$$2\sqrt{x^2-2}+x = 4,$$

$$\sqrt{x^2-2} + x = 2,$$

$$\sqrt{x^2-2} = 2-x, \quad 2-x > 0, \quad x < 2.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$4x = 6, \quad x = 3/2 \in \text{О.Д.З.}$$

*Ответ:*  $x = 3/2$ .

*Пример 3.* Решить уравнение  $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{2^{3x+3}} + 12 = 0$ .

*Решение:* О.Д.З.  $x \in N$ ,

$$64^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0,$$

$$2^{\frac{3 \cdot 2}{x}} - 2^{\frac{3}{x}+3} + 12 = 0.$$

Сделаем замену  $2^{\frac{3}{x}} = t, \quad t > 0.$

Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 8t + 12 = 0,$$

корнями которого будут  $t_1 = 2; \quad t_2 = 6.$

$$2^{\frac{3}{x}} = 2, \Rightarrow \frac{3}{x} = 1, \Rightarrow x_1 = 3 \in N$$

$$2^{\frac{3}{x}} = 6.$$

Прологарифмируем с основанием 2:

$$\frac{3}{x} = \log_2 6 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{\log_2 6} \notin N.$$

*Ответ:*  $x = 3.$

### Примеры для самостоятельного решения

$$1. 4\sqrt{3x^2-2x+1} + 2 = 9 \cdot 2\sqrt{3x^2-2x},$$

$$[x_1 = 1; x_2 = -1/3]$$

$$2. 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0,$$

$$[x_{1,2} = \pm\sqrt{2}; x_{3,4} = \pm 1]$$

$$3. 3^{\sqrt{x}}\sqrt{81} - 10^{\sqrt{x}}\sqrt{9} + 3 = 0, \quad [x = 2]$$

$$4. 3^{1-x} + 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 8, \quad [x = 0]$$

$$5. 64^{\frac{1}{x}} - 2^{2+\frac{3}{x}} + 12 = 0, \quad [x_1 = 3; x_2 = \log_6 8]$$

$$6. 2^{3-x} + 2^x = 9, \quad [x_1 = 0; x_2 = 3]$$

$$7. 5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26, \quad [x_1 = 1; x_2 = 3]$$

$$8. 3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0, \quad [x_1 = 1; x_2 = 0]$$

$$9. 2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17, \quad [x = -3]$$

$$10. 4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0, \quad [x = 4]$$

$$11. 3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2, \quad [x = 0]$$

$$12. 10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}, \quad [x_{1,2} = \pm 1/2]$$

$$13. 8^x - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0, \quad [x_1 = 3; x_2 = 3 \log_6 2]$$

$$14. 4^{1-(x+1)^2} - 3 \cdot 2^{2-(x+1)^2} + 8, \quad [x = -1]$$

$$15. 2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6,$$

$$\left[ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \right]$$



**5. Уравнения вида:**  $A_0 a^{bx+m_0} + A_1 a^{bx+m_1} + \dots + A_n a^{bx+m_n} = B$

решаются методом вынесения общего множителя, где  $A_0, A_1, \dots, A_n, m_0, m_1, \dots, m_n$  – постоянные величины.

*Пример 1.* Решить уравнение  $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ .

Решение: после вынесения за скобку в левой части  $6^x$ , в правой  $2^x$ , получим

$$6^x(1+6) = 2^x(1+2+4),$$

$$6^x = 2^x,$$

$$(2 \cdot 3)^x = 2^x,$$

$$2^x(3^x - 1) = 0,$$

$$2^x \neq 0, \quad 3^x = 1,$$

$$3^x = 3^0.$$

*Ответ:*  $x = 0$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}, \quad [x = 2]$

2.  $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550, \quad [x = 3/2]$

$$3. 35 \cdot 3^{x^2} - 35 \cdot 5^{2x} - 3^{x^2} + 5^{2x} = 0, \quad \left[ x_1 = 0, x_2 = \frac{2 \lg 5}{\lg 3} \right]$$

$$4. 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31, \quad [x = 1]$$

$$5. 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5, \quad [x = -1]$$

$$6. 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 24, \quad [x = 3]$$

$$7. 4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^x = 5, \quad [x = -2]$$

$$8. x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}, [x_{1,2} = \pm 1/2, x \in [3; +\infty)]$$

## 6. Однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$$

решаются путем деления либо на  $a^x$ , либо на  $b^x$ , либо на  $(a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}})$ .

*Пример 1.* Решить уравнение  $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$ .

*Решение:* Разделим обе части уравнения на  $4^x$ :

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

Обозначим  $(3/2)^x = t$ ,  $t > 0$ . Тогда последнее уравнение запишется так:

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

$$t_1 = -2 \notin (0; +\infty), \quad t_2 = 1 \in (0; +\infty).$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$$

*Ответ:*  $x = 0$ .

*Пример 2.* Решить уравнение  $25^x - 12 \cdot 2^x - 6,25 \cdot 0,16^x = 0$ .

*Решение:* Запишем уравнение в виде:

$$5^{2x} - 12 \cdot 2^x - 6,25 \cdot 0,4^{2x} = 0.$$

Замечая, что  $2 = 5 \cdot 0,4$ , а следовательно,  $2^x = 5^x \cdot 0,4^x$ , приходим к уравнению

$$5^{2x} - 12 \cdot 5^x \cdot 0,4^x - 6,25 \cdot 0,4^{2x} = 0,$$

которое является однородным степени 2 относительно  $5^x$  и  $0,4^x$ . Разделив его на  $0,4^x$  и обозначив  $t = (5/0,4)^x = (12,5)^x$ ,  $t > 0$  получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 12t - 6,25 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 6,25}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{12 \pm 13}{2},$$

$$t_1 = \frac{25}{2} = 12,5 \in \text{О.Д.З.} \quad t_2 = -\frac{1}{2} \notin \text{О.Д.З.}$$

$$(12,5)^x = 12,5 \Rightarrow x = 1.$$

*Ответ:*  $x = 1$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $16^x - 5 \cdot 8^x + 6 \cdot 4^x = 0$ ,  $[x_1 = 1; x_2 = \log_2 3]$

2.  $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$ ,  $[x = 2]$

3.  $6\sqrt[3]{9} - 13\sqrt[3]{6} + 6\sqrt[3]{4} = 0$ ,  $[x = 1]$

4.  $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$ ,  $[x_1 = 1; x_2 = 0]$

5.  $75 \cdot 9^x - 152 \cdot 15^x + 45 \cdot 25^x = 0$ ,  $[x_1 = -1; x_2 = 2]$

6.  $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$ ,  $[x = -1/2]$

### Использование различных свойств логарифмов

Пример 1. Решить уравнение:  $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18$ .

Решение.  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$  Известно, что  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ , перепишем уравнение

$$\begin{aligned} 3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18 &\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 18 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = 3^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 x = 2, \quad x = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

Пример 2. Решить уравнение:  $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = 3/4$ .

Решение.  $x > 0$ . Перейдем к основанию 16, используя свойство  $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ .

$$\begin{aligned} \log_{16} x^4 - \log_{16} x^2 + \log_{16} x &= 3/4 \quad \Leftrightarrow \\ 4\log_{16} x - 2\log_{16} x + \log_{16} x &= 3/4 \quad \Leftrightarrow \\ 3\log_{16} x = 3/4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{16} x = 1/4 &\Rightarrow x = 2 \in (0; \infty). \end{aligned}$$

Ответ: 2.

### Метод логарифмирования

(используют при решении показательно-логарифмических уравнений).

Пример 3. Решить уравнение:  $x^{\lg^2 x} + \lg x^5 - 12 = 10^{2\lg x}$ .

Решение. О.Д.З.  $x > 0$ . Прологарифмируем уравнение по основанию 10

$$\lg x^{\lg^2 x + 5\lg x - 12} = \lg 10^{2\lg x} \Leftrightarrow$$

$$(\lg^2 x + 5\lg x - 12) \lg x = 2\lg x \Leftrightarrow$$

$$\lg x (\lg^2 x + 5\lg x - 14) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = 0, \\ \lg^2 x + 5\lg x - 14 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^0 = 1, \\ \lg x = 2 \text{ и } \lg x = -7. \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 100, x_3 = 10^{-7}.$$

Ответ: 1, 100,  $10^{-7}$ .

### III. Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств необходимо помнить, что

1. функция  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ) является убывающей, если  $0 < a < 1$ .
2. и возрастающей, если  $a > 1$ .

Поэтому неравенство вида  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

1. при  $0 < a < 1$  равносильно системе 
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. при  $a > 1$  равносильно системе 
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим примеры решения логарифмических неравенств.

*Пример 1.* Решить неравенство:  $\log_4 x - \log_x 4 \leq 1,5$ . В ответе указать наибольшее  $x$ .

*Решение.* Запишем неравенство в виде  $\log_4 x - \frac{1}{\log_4 x} \leq \frac{3}{2}$  и обозначим  $y = \log_4 x$ .

В результате получим неравенство

$$y - \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow y - \frac{1}{y} - \frac{3}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 3y - 2}{2y} \leq 0.$$

Решаем методом интервалов

$$y_1 = 0, y_2 = -0,5, y_3 = 2.$$

$$y \in (-\infty; -0,5] \cup (0; 2].$$

Отсюда соответственно находим

$$0 < x \leq 0,5.$$



неравенство:

$$\log_2 x \leq -0,5,$$

$$0 < \log_2 x \leq 2, \quad 1 < x \leq 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2. Найти наибольшее целое решение неравенства:

$$\log_{0,2} (5x - 1) > \log_{0,2} (2x + 5).$$

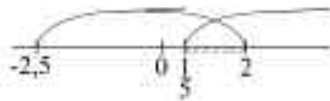
Решение.  $0 < 0,2 < 1$ . Составим и решим систему

$$\begin{cases} 5x - 1 > 0, \\ 2x + 5 > 0, \\ 5x - 1 < 2x + 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/5, \\ x > -5/2, \\ 3x < 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/5, \\ x > -5/2, \\ x < 2. \end{cases}$$

Имеем

$$x \in (1/5; 2).$$

Ответ: 1.





Пример 3. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x+3).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 > 2x+3. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 < 2x+3. \end{cases}$$

Решим первую систему:  $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 - 2x - 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3/2 < x < -1, \\ (x-3)(x+1) > 0. \end{cases} \Rightarrow$

$$-3/2 < x < -1.$$



Теперь решим вторую систему:

$$\begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ (x-3)(x+1) < 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$-1 < x < 3.$$

Решение будет:  $x \in (-3/2; -1) \cup (-1; 3)$ .



Ответ: 2.

Пример 4. Решить неравенство:  $(0,5)^{\log_3 \log_{1/5} (x^2 - \frac{4}{5})} < 1$ .

Решение. Обозначим  $y = \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right)$ .

$$0,5^y < 0,5^0, \quad y > 0.$$

$$\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 0 = \log_3 1.$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{5} > 0, \\ x^2 - \frac{4}{5} < \frac{1}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \frac{4}{5}, & |x| > \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ x^2 < 1. & |x| < 1. \end{cases}$$

$$x \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right).$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right).$$

**Примеры для самостоятельного решения**

1. Решить уравнение:  $\sqrt[12]{7^{-x}} = \log_{0,3} 0,3^{\frac{1}{343}}$ .

Ответ: 36.

2. Решить уравнение:  $\log_2 (1 + 3\log_2 x) = 2$ .

Ответ: 2.

3. Найти больший корень уравнения:

$$2\lg^2 x + 2\log_5^2 0,2 = 1,5 + 1,5\lg x.$$

Ответ: 10.

4. Решить уравнение:  $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x) \lg \frac{5}{3}$ . В ответ записать  $3x$ .

Ответ: 2.

5. Решить уравнение:  $(0,2)^{1+\log_2 x + \log_2^2 x + \dots} = 5$ ,  $|\log_2 x| < 1$ .

Ответ: 4.

6. Решить уравнение:  $5^{\log_3 x} + x^{\log_3 5} = 50(4 - 2^{0,5\log_2 9})$ .

Ответ: 9.

7. Найти больший корень уравнения:  $(x + 1)^{\lg(x+1)} = 100(x + 1)$ .

Ответ: 99.

8. Решить уравнение:  $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$ . В ответе указать больший корень.

Ответ: 100.

9. Решить уравнение:  $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$ . В ответ записать  $9x$ .

*Ответ:* 1.

10. Решить систему: 
$$\begin{cases} x^y = 8, \\ \log_3 y + 2 \log_3 \log_2 x = 2. \end{cases}$$

*Ответ:* (8; 1).

11. Решить уравнение:  $\lg^{-1} x = 6 - \lg^2 100 + \lg x^{-1}$ .

*Ответ:* 10.

12. Найти наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

$$\log_{0,82} \left( \frac{x^2 - 7}{x - 4} \right) < 0.$$

*Ответ:* 6.

13. Решить неравенство:  $\log_{\frac{1}{4}} (2x + 3) > \log_9 27$ .

*Ответ:*  $-\frac{3}{2} < x < -\frac{23}{16}$ .

14. Решить неравенство:  $\log_{100} x^2 + \log_{10}^2 x < 2$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{100} < x < 10$ .

15. Решить неравенство:  $\log_4(5 - 3^x) \cdot \log_2 \frac{5 - 3^x}{8} \geq -1$ .

*Ответ:*  $x \leq 0$ ;  $1 \leq \log_3 5$ .

16. Найти наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

$$(x - 3)\log_3 0,7 > 0.$$

*Ответ:* 2.

17. Найти наименьшее значение  $x$  из области определения функции:

$$y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}.$$

*Ответ:* 1.

18. Найти наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} < 1.$$

*Ответ:* 3.

19. Найти наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству:  $\lg x - \lg(x + 2) > \lg 3 - \lg(x^2 - 4)$ .

*Ответ:* 4.

20. Найти целое решение системы неравенств:

$$(x^2 + 8)^{\log_8 x} < 6x^{\log_8 x} \quad \text{и} \quad x > 1.$$

*Ответ:* 3.

**21.** Найти наибольшее целое решение  $x$ , удовлетворяющее неравенству:  $\lg \lg x + \lg (\lg x^3 - 2) < 0$ .

*Ответ:* 9.

**22.** Найти наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

*Ответ:* -3.

#### IV. Показательно-степенные уравнения

Уравнение называется *показательно-степенным*, если оно содержит неизвестную величину в основании и в показателе.

Такие уравнения решаются путем логарифмирования с произвольным основанием с последующим рассмотрением случаев, когда основание равно 0 и 1, при этом необходимо помнить, что выражение  $0^{\alpha}$  имеет смысл лишь при  $\alpha > 0$ .

$$\text{Пример 1.} \quad \sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$$

$$\text{Решение 1.} \quad |x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}.$$

Прологарифмируем уравнение с основанием  $e$

$$\begin{aligned} \ln|x-3|^{\frac{x+1}{4}} &= \ln|x-3|^{\frac{x-2}{3}}, \\ \left(\frac{x+1}{4}\right)\ln|x-3| - \left(\frac{x-2}{3}\right)\ln|x-3| &= 0, \\ \ln|x-3| \cdot \left(\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3}\right) &= 0, \\ \ln|x-3| \cdot \left(\frac{3x+3-4x+8}{12}\right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\ln|x-3| \cdot \left(\frac{11-x}{12}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{11-x}{12} = 0\right) \Rightarrow x_1 = 11.$$

$$\ln|x-3| = 0, \quad |x-3| = e^0, \quad |x-3| = 1, \\ x-3 = \pm 1, \quad x = 3 \pm 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2.$$

Заметим, что левая и правая части уравнения совпадут при  $x_4 = 3$

$$\left(0^{\frac{1}{4}} \equiv 0^{\frac{1}{3}}\right).$$

*Ответ:*  $x_1 = 11, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3.$

*Решение 2.* При решении этого показательно-степенного уравнения возможны три случая:

$$1. |x-3|=0; \quad 2. |x-3|=1; \quad 3. \begin{cases} |x-3| > 0, \\ |x-3| \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим эти случаи:

**1.**  $|x-3|=0$ . В этом случае исходное уравнение примет вид:



$$0^{\frac{x+1}{4}} \equiv 0^{\frac{x-2}{3}}.$$

Следовательно  $x_1 = 3$  – решение, т.к. удовлетворяет О.Д.З.:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} > 0; \\ \frac{x-2}{3} > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x > 2, \end{cases} \Rightarrow x > 2.$$

(выражение  $0^\alpha$  имеет смысл лишь при  $\alpha > 0$ ).

**2.**  $|x - 3| = 1$ . В этом случае исходное уравнение примет вид:

$$1^{\frac{x+1}{4}} = 1^{\frac{x-2}{3}}, \text{ т.е. } 1 \equiv 1.$$

Значит корни уравнения  $|x - 3| = 1$  являются корнями исходного уравнения

$$x - 3 = \pm 1,$$

$$x = 3 \pm 1, \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 2.$$

**3.** Если  $|x - 3| > 1$  б  $|x - 3| \neq 1$ , то из начального уравнения заключаем, что

$$\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3},$$

$$3x + 3 = 4x - 8,$$

$$x_4 = 11.$$

$x_4$  удовлетворяет системе  $\begin{cases} |x - 3| > 0, \\ |x - 3| \neq 1. \end{cases}$

Подстановкой убеждаемся, что  $x_4 = 11$  – корень.

*Ответ:*  $x_1 = 11, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3.$

*Пример 2.* Решить уравнение  $x^{\log_3 x^2} = 9$ . В ответе указать больший корень.

*Решение:* Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x^2} = \log_3 9,$$

$$2 \log_3 x \cdot \log_3 x = 2,$$

$$2 \log_3^2 x = 2,$$

$$\log_3^2 x = 1,$$

$$\log_3 x = \pm 1.$$

$$\log_3 x = 1, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3.$$

$$\log_3 x = -1, \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1/3.$$

*Ответ:  $x = 3$ .*

*Пример 3.* Решить уравнение  $(x^{\lg x})^3 - 100x^3 = 0$ . В ответе записать больший корень.

*Решение:* О.Д.З.:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$  Перепишем уравнение в виде:

$$x^{2\lg x} = 100x^3.$$

Прологарифмируем обе части последнего уравнения по основанию 10.

$$2\lg x \cdot \lg x = 2 + 3\lg x,$$

$$2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0.$$

Обозначим  $\lg x = t$ :  $2t^2 - 3t - 2 = 0$ ,

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4},$$
$$t_1 = 2, \quad t_2 = -1/2.$$

Откуда,  $\lg x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 100$ ,

$$\lg x_2 = -1/2 \Rightarrow x_2 = 10^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

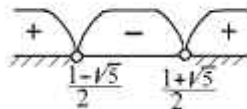
*Ответ:  $x = 100$ .*

Пример 4. Решить уравнение  $(x^2 - x - 1)^{x^2 - 1} = 1$ .

Решение 1: О.Д.З.  $x^2 - x - 1 > 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,6, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6 \right)$$



Прологарифмируем уравнение с основанием  $e$

$$\ln(x^2 - x - 1)^{x^2 - 1} = \ln 1,$$

$$(x^2 - 1) \ln(x^2 - x - 1) = 0,$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad \ln(x^2 - x - 1) = 0.$$

$$x_1 = 1, \quad x^2 - x - 1 = e^0,$$

$$x_2 = -1, \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

$x_1 = 1 \notin \text{О.Д.З.}$

Ответ:  $x_1 = 2, \quad x_2 = -1$ .

Решение 2:  $(x^2 - x - 1)^{x^2 - 1} = (x^2 - x - 1)$ .

$$1. x^2 - x - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0, \\ x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

$$2. \begin{cases} x^2 - x - 1 > 0, \\ x^2 - x - 1 \neq 1, \\ x^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ x \neq -1; \quad x \neq 2, \\ x = 1; \quad x = -1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \emptyset.$$

Ответ:  $x_1 = 2, \quad x_2 = -1$ .

### Примеры для самостоятельного решения

$$1. |x-3|^{3x^2-10x+8} = 1, \quad [x_1 = 2, x_2 = 4/3, x_3 = 4]$$

$$2. |x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}, \quad [x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1/2]$$

3.  $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1,$   $[x_1 = 4, x_2 = 5]$
4.  $x^{\log_3 x^3} = 27,$   $[x = 3]$
5.  $(x-3)^{x^2} = (x-3)^x,$   $[x_1 = 4, x_2 = 3]$
6.  $x^{2+\log_3 x} = 3^8,$   $[x_1 = 9, x_2 = 3^{-4}]$
7.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x,$   $[x_1 = 1, x_2 = 4]$
8.  $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x,$   $[x_1 = 1, x_2 = 8]$
9.  $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1,$   $[x_1 = 1/3, x_2 = 2, x_3 = 4]$
10.  $(\sqrt{x})^{\log_5 x^{-1}} = 5,$   $[x_1 = 1/5, x_2 = 25]$
11.  $x^{\lg x+7} = 10^{(\lg x+1)^4},$   $[x_1 = 10, x_2 = 10^{-4}]$
12.  $x^{\log_a x} = (a^\pi)^{\log_a^3 x},$   $[x_1 = 1, x_2 = a^{1/\pi}]$
13.  $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}} = |x-4|^2,$   $[x_1 = -4, x_2 = -1]$
14.  $|2-x|^{\sqrt{x^2-x-2}} = |2-x|^2,$   $[x_1 = -2, x_2 = 3]$
15.  $|2x+1|^{\sqrt{2x^2-5x-2}} = |2x+1|,$   $[x = 3]$

$$16. |3x - 2|\sqrt{2x - 3x^2} = 1,$$

$$[x = 0]$$

$$17. |1 - 3x|\sqrt{5x^2 + 7x - 2} = |1 - 3x|^2.$$

$$[x_1 = -2, x_2 = 3/5]$$

## V. Показательные уравнения, решаемые логарифмированием обеих частей уравнения

*Пример 1.* Решить уравнение  $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$ .

*Решение:* Обе части уравнения положительны. Логарифмируем по основанию 2, получаем уравнение

$$2 + (x - 1) \log_2 9 = \log_2 3 + \frac{1}{2}(2x + 1),$$

которое, очевидно, имеет те же решения, что и исходное уравнение, т.е. равносильно ему. Преобразуя это уравнение и учитывая, что  $\log_2 3 = \frac{1}{2} \log_2 9$ , получаем

$$\begin{aligned} x(\log_2 9 - 1) &= \frac{3}{2}(\log_2 9 - 1), \\ (\log_2 9 - 1)(x - 3/2) &= 0, \\ x = 3/2, \quad \text{т.к. } \log_2 9 - 1 &\neq 0. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $x = 3/2$ .

*Пример 2.* Решить уравнение  $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$ .

*Решение:* Прологарифмируем обе части исходного уравнения по основанию 3



$$\log_3 \left( 3^x \cdot 8^{x+2} \right) = \log_3 6,$$

$$x + \log_3 2^{3x} = \log_3 (2 \cdot 3),$$

$$x + \frac{3x}{x+2} \log_3 2 = \log_3 2 + 1.$$

После преобразований последнее уравнение приводится к виду:

$$x^2 + (1 + 2 \log_3 2)x - 2(1 + \log_3 2) = 0,$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 - 2 \log_3 2 \pm \sqrt{(1 - 2 \log_3 2)^2 - 8(1 + \log_3 2)}}{2} = \\ &= \frac{-1 - 2 \log_3 2 \pm \sqrt{(2 \log_3 2 + 3)^2}}{2} = \frac{-1 - 2 \log_3 2 \pm |2 \log_3 2 + 3|}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\log_3 2 > 0$ , т.к. 3 и 2 находятся по одну сторону от 1, то

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 - 2 \log_3 2 \pm (2 \log_3 2 + 3)}{2}, \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = -2 - 2 \log_3 2 = -2(1 + \log_3 2) = \\ &= -2(\log_3 3 + \log_3 2) = -2 \log_3 6. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $x_1 = 1, \quad x_2 = -2 \log_3 6.$

Пример 3. Решить уравнение  $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$ .

Решение: О.Д.З.:  $x \in \mathbb{N}$ .

Возведем правую и левую части уравнения в степень  $x$

$$5^{x^2} \cdot 8^{x-1} = 500^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3(x-1)} = (125 \cdot 4)^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3x-3} = (5^3 \cdot 2^2)^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3x-3} = 5^{3x} \cdot 2^{2x}.$$

Прологарифмируем по основанию 5 правую и левую части данного соотношения:

$$\log_5(5^{x^2} \cdot 2^{3x-3}) = \log_5(5^{3x} \cdot 2^{2x}),$$

$$\log_5 5^{x^2} + \log_5 2^{3x-3} = \log_5 5^{3x} + \log_5 2^{2x},$$

$$x^2 + (3x-3)\log_5 2 = 3x + 2x \log_5 2,$$

$$x^2 - 3x + x \log_5 2 - 3 \log_5 2 = 0,$$

$$x^2 - (3 + \log_5 2)x - 3 \log_5 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 - \log_5 2 \pm \sqrt{(3 - \log_5 2)^2 + 4 \cdot 3 \log_5 2}}{2} =$$

$$= \frac{3 - \log_5 2 \pm \sqrt{\log_5^2 2 + 6 \log_5 2 + 9}}{2} = \frac{3 - \log_5 2 \pm (3 + \log_5 2)}{2}.$$

$$x_1 = 6/2 = 3 \in N, \quad x_2 = -\log_5 2 \notin N.$$

Ответ:  $x = 3$ .

Пример 4. Решить уравнение  $5^{\frac{x+2}{x}} \cdot 2^{x+1} = 500$ .

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$5^{1+\frac{2}{x}} \cdot 2^{x+1} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5,$$

$$5^{\frac{-2(x-1)}{x}} \cdot 2^{x-1} = 1.$$

Отсюда  $\left(5^{\frac{-2}{x}} \cdot 2\right)^{x-1} = 1$ .

Полученное уравнение равносильно (при  $x \neq 0$ ) совокупности двух уравнений  $x - 1 = 0$ , т.е.  $x_1 = 1$  и  $5^{-2/x} \cdot 2 = 1$ ,

Отсюда  $5^{\frac{2}{x}} = 2$ , т.е.  $\frac{2}{x} = \log_5 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{\log_5 2} = 2 \log_2 5$ .

Ответ:  $x_1 = 1, x_2 = 2 \log_2 5$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1.  $5^{2x-1} = 7^{3-x}$ ,

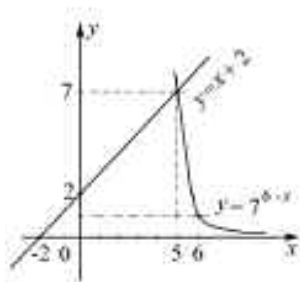
$$\left[ x = \frac{1 + 3 \log_5 7}{2 + \log_5 7} \right]$$

## VI. Уравнения решаемые графически и аналитически

Некоторые уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени можно решить либо графически, либо с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнений.

*Пример 1.* Решить уравнение  $7^{6-x} = x + 2$ .

*Решение:* (графически) 1. Строим график функции:



$$y_1 = 7^{6-x} = 7^{-(x-6)} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-6}.$$

График функции смещен на шесть единиц вправо, т.к. основание  $y_1$  меньше 1, то график функции убывающий.

2. Строим график функции  $y = x + 2$ . Затем опускаем перпендикуляр на ось  $OX$ .  $x = 6$ .

*Решение 2.* (аналитически)

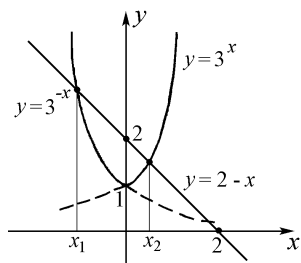
$$y_1 = 7^{6-x}, \quad y_2 = x + 2$$

$y_1$  монотонно убывает, а  $y_2$  монотонно возрастает, и, следовательно графики этих функций могут пересекаться не более одного раза. Корень  $x = 5$  находится подбором.

Пример 2. Сколько корней имеет уравнение  $3^{|x|} = 2 - x$ .

Решение:

$$y_1 = 3^{|x|} = \begin{cases} 3^x, & x > 0 \\ 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x < 0. \end{cases}$$



Строим график функции

$$y = 3^{|x|} \text{ и } y = 2 - x.$$

Ответ: 2 корня.

Пример 3. Решить уравнение  $3^x + 4^x = 7$ .

*Решение:* Легко указать и проверить, что  $x = 1$  – корень данного уравнения. Покажем, что других корней уравнение иметь не может. Воспользуемся тем, что при  $a > 1$  функция  $a^x$  является возрастающей.

При  $x > 1$  имеем:  $3^x + 4^x > 7$ , а при  $x < 1$  имеем:  $3^x + 4^x < 7$ , т.е. уравнение имеет единственный корень  $x = 1$ .

*Ответ:*  $x = 1$ .

*Пример 4.* Решить уравнение  $4^x + (x - 13) \cdot 2^x - 2x + 22 = 0$ .

*Решение:* Решив квадратное относительно  $2^x$  уравнение, получим:  $2^x = 2$  и  $2^x = 11 - x$ .

Корнем первого уравнения является  $x = 1$ , причем в силу возрастания функции  $2^x$  этот корень единственный. Далее заметим, что так как  $y = 2^x$  является функцией возрастающей, а функция  $y = 11 - x$  – убывающей, то второе уравнение также не может иметь более одного корня. Легко угадать единственный корень  $x = 3$ , который можно найти и графически.

*Ответ:*  $x_1 = 1, x_2 = 3$ .

### **Примеры для самостоятельного решения**

1. Сколько корней имеет уравнение  $x - 3 = -2^{|x|}$ . [2]

## VII. Показательные уравнения, решаемые с помощью оценок

*Пример 1.* Решить уравнение  $2^{\cos^2 x} = \sin 3x$ .

*Решение:*  $2^{\cos^2 x} \geq 1$ , а  $\sin 3x \leq 1$ .

Следовательно исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2^{\cos^2 x} = 1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos^2 x = 0, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin 3x = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, & k \in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, \quad n = \frac{2}{3}k - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}k - n, \quad n = \frac{2k-1}{3},$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}k - n, \quad k = k = 3l + 2, \quad l \in Z$$



$$n = \frac{2(3l+2)-1}{3} = \frac{6l+3}{3} = 2l+1.$$

Поэтому  $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2l+1) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi l, \quad l \in Z.$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2l+1) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi l, \quad l \in Z.$

### VIII. Показательные уравнения с параметром

*Пример.* При каких действительных  $a$  уравнение

$$(a+1)2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$$

имеет единственное решение?

*Решение:* Обозначим  $2^x = t, t > 0$ .

$$(a+1)t^2 + t + 3 - a = 0, \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(a+1)(3-a)}}{2(a+1)}.$$

Проанализируем возможные варианты.

1. Рассмотрим случай, когда квадратное уравнение выражается в линейное: при  $a = -1$  имеем  $t = -4 < 0$ . Следовательно при  $a = -1$  уравнение не имеет решения.

2. Корень будет единственным если:

$$\begin{cases} D = 0, \\ -\frac{1}{2(a+1)} > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2 - 8a - 11 = 0, \\ a < -1. \end{cases} \quad \begin{cases} a_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}, \\ a < -1. \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$a_1 = 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \approx -0,9;$$

$$a_2 = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 2,9.$$

3. Корень будет единственным если:

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 = 0, \\ t_2 > 0. \end{cases}$$

Вспользуемся теоремой Виета

$$\begin{cases} \left( a - \left( 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \right) \right) \left( a - \left( 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \right) \right) > 0, \\ t_1 + t_2 = \frac{-1}{a+1} > 0, \\ t_1 t_2 = \frac{3-a}{a+1} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left( -\infty; 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \right) \cup \left( 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}; +\infty \right) \\ a < -1, \\ a = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a = 3. \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

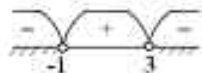
4. Корень будет единственным, если:  $\begin{cases} D > 0, \\ t_1 < 0, \\ t_2 > 0. \end{cases}$

Вспользуемся теоремой Виета

$$a \in \left( -\infty; 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \right) \cup \left( 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}; +\infty \right),$$

$$t_1 + t_2 = \frac{-1}{a+1} > 0,$$

$$t_1 t_2 = \frac{3-a}{a+1} < 0.$$



$$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \quad (*) \\ -\frac{1}{a+1} > 0 \end{cases}$$

Возможные случаи:

$$-|t_1| < |t_2| : -\frac{1}{a+1} > 0 \Rightarrow a < -1, \text{ с учетом } (*) \ a \in (-\infty; -1).$$

$$- |t_1| = |t_2| : -\frac{1}{a+1} = 0 \Rightarrow a \in \emptyset.$$

$$- |t_1| > |t_2| : -\frac{1}{a+1} < 0 \Rightarrow a > -1, \text{ с учетом (*) } a \in (3; +\infty).$$

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .

### Примеры для самостоятельного решения

1. При каких значениях  $a$  уравнение  $4^x - (a+1)2^x + 2a - 2 = 0$  имеет ровно один корень?  
 $[a \in (-\infty; 1] \cup \{3\}]$

2. При каких действительных  $a$  уравнение

$$(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$$

имеет два различных корня?

$$\left[ a \in \left( -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

3. Найти все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p - 1 = 0$$

не имеет решений.

$$\left[ p \in \left( -\infty; \frac{3}{7} \right) \cup [4; +\infty) \right]$$

4. При каких значениях  $a$  уравнение  $4^x - (3a + 7)2^x + 21a = 0$  имеет единственный корень?  
[ $x \in (-\infty; 0] \cup \{7/3\}$ ]

5. При каких значениях  $a$  уравнение  $25^x - (a - 1)5^x + 2a + 3 = 0$  имеет единственное решение?  
[ $x \in (-\infty; -3/2) \cup \{11\}$ ]

6. Решить уравнение  $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$  для всех значений  $a$ . [при  $a \in (3; 27)$ :

$$x = 2 + \log_4 \frac{a - 27}{3 - a}, \text{ при } a \in (-\infty; 3] \cup [27; +\infty) \text{ решений нет}]$$

7. Решить уравнение  $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$  для всех значений  $a$ . [при  $a \neq$

$$-3, a \neq 1/2, a \neq -2: x = \frac{2a-1}{a+3}, \text{ при } a = -3, a = 1/2, a = -2 \text{ решений нет}]$$

## IX. Системы показательных уравнений

Системы, содержащие показательные уравнения, обычно решаются сведением показательного уравнения к алгебраическому уравнению с последующим решением полученной алгебраической системы.

Пример 1. Решить систему 
$$\begin{cases} 2^{y-x}(x+y) = 1, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases}$$

Решение: Область определения:  $x + y > 0$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2^{y-x}}, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2^{x-y}, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases}$$

Первое уравнение подставим во второе уравнение. Тогда  $(2^{x-y})^{-y} = 2 \Rightarrow 2^{(x-y)^2} = 2 \Rightarrow (x-y)^2 = 1.$

Решением данной системы будет решение совокупности систем

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 1/2. \end{cases}$$

Решим системы методом алгебраического сложения

$$\begin{array}{l} \pm \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \\ 2x = 3, \\ x = 3/2, \\ -2y = -1, \\ y = 1/2. \end{array} \quad \pm \begin{array}{l} \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 1/2. \end{cases} \\ 2x = -1/2, \\ x = -1/4 \\ -2y = -3/2, \\ y = 3/4. \end{array}$$

Ответ:  $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$

### Примеры для самостоятельного решения

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases} \quad [(3; 2)]$$

$$2. \begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{2x-2y-3} = 1. \end{cases} \quad \text{В ответе указать значения } (2x + y). \quad [6]$$



$$3. \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,75, \\ 2^x - 3^y = -0,75. \end{cases} \quad [(-2; 0)]$$

$$4. \begin{cases} (x+y)2^{y-2x} = 6,25, \\ (x+y)\frac{1}{2^{x-y}} = 5. \end{cases} \quad [(9; 16)]$$

$$5. \begin{cases} x^2 - 2^{y+1} = 1, \\ 2x^2 + 2^{y-1} = 20. \end{cases} \quad [(3; 2), (-3; 2)]$$

$$6. \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{x/2} - 2^y = 7. \end{cases} \quad [(4; 1)]$$

$$7. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases} \quad [(2; 1)]$$

$$8. \begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7. \end{cases} \quad [(1; 0)]$$

$$9. \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases} \quad \left[ (1; 1), \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9} \right) \right]$$

## Х. Показательные неравенства

При решении простейших показательных неравенств надо помнить о том, что свойства показательной функции различны при основаниях, больших или меньше единицы.

$$a^u > a^v \Leftrightarrow \begin{cases} u > v, & \text{при } a > 1, \\ u < v, & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$a^u < a^v \Leftrightarrow \begin{cases} u < v, & \text{при } a > 1, \\ u > v, & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

*Пример 1.* Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-25} > 1.$$

*Решение:* Неравенство перепишем в виде

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-25} > \left(\frac{1}{9}\right)^0.$$

Так как  $1/9 < 1$ , то из преобразованного неравенства следует неравенство

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &< 0, \\x^2 &< 25, \\-5 &< x < 5.\end{aligned}$$

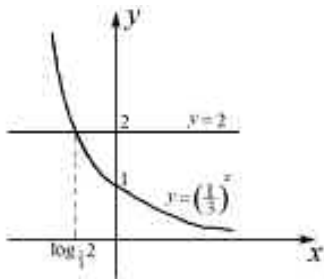
Т.е. наименьшее целое решение исходного неравенства равно  $-4$ .

*Ответ:*  $x = -4$ .

*Пример 2.* Решить неравенство  $-1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$ .

Решение: Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}. \end{cases} \Rightarrow x > \log_{1/3} 2.$$



*Решение 2* (графически). Решениями являются те значения  $x$ , при которых график функции  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  лежит ниже горизонтальной прямой  $y = 2$ , т.е. все  $x$  правее абсциссы точки пересечения построенных

графиков (эта абсцисса является решением уравнения  $(1/3)^x = 2$ ). Таким образом, решением неравенства является интервал  $x > \log_{1/3} 2$ .

*Пример 3.* Решить неравенство  $2^{2x-1} > 2^{x-1} + 1$ .

*Решение:* Обозначим  $2^x = t, t > 0$ , тогда неравенство переписывается так:

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1 > 0,$$

$$t^2 - t - 2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -1.$$

$$\begin{cases} (t-2)(t+1) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$$t \in (2; +\infty), \text{ т.е. } t > 2.$$

$$2^x > 2,$$

$$x > 1.$$

*Ответ:*  $x \in (1; +\infty)$ .

*Пример 4.* Решить неравенство  $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$ .

*Решение:* О.Д.З.  $x \geq 0$ . Запишем исходное неравенство в виде

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})},$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}.$$

Так как основание  $0 < 4/5 < 1$ , то последнее неравенство равносильно неравенству  $x - 1 > 4(1 + \sqrt{x})$  (знак неравенства изменился на противоположный).

Далее имеем  $x - 4\sqrt{x} - 5 > 0$ , откуда  $(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 1) > 0$ , т.к.  $\sqrt{x} + 1 > 0$ , для любого  $x > 0$ , то  $\sqrt{x} - 5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 5$ .

Окончательно получим  $x > 25$ .

*Ответ:*  $x \in (25; +\infty)$ .

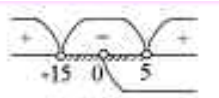
*Пример 5.* Решить неравенство  $\frac{75 - 25^{x^2+6x-15}}{2} \geq 5^{x^2+6x-14}$ .

*Решение:* Положим  $t = 5^{x^2+6x-15}$ ,  $t > 0$ . Тогда данное неравенство переписется в виде

$$\begin{cases} t^2 + 10t - 75 \leq 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 75}}{2} = \frac{-10 \pm 20}{2},$$

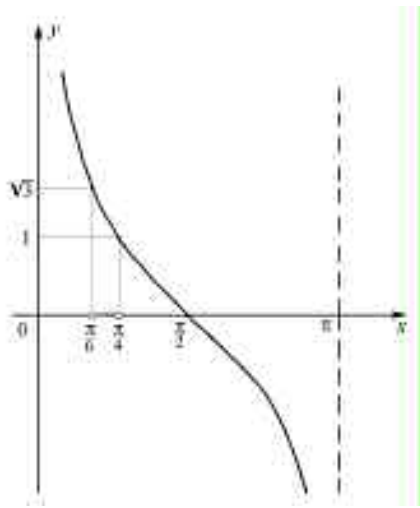
$$t_1 = 5, \quad t_2 = -15.$$

$$\begin{cases} (t-5)(t+15) \leq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$$0 < t \leq 5, \quad 0 < 5^{x^2+6x-15} \leq 5.$$

Левое неравенство выполнено для всех  $x$ , а правое – равносильно неравенству  $x^2 + 6x - 16 \leq 0$ ,



$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}, \quad x_1 =$$

$$-8, \quad x_2 = 2.$$



$$(x+8)(x-2) \leq 0,$$

$$-8 \leq x \leq 2.$$

Ответ:  $x \in [-8; 2]$

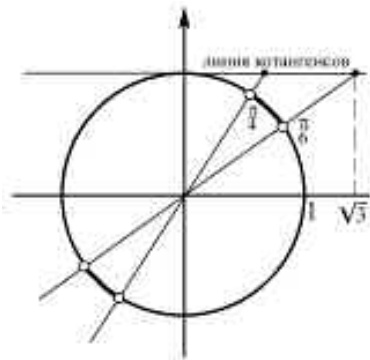
*Пример 6.* Решить неравенство  $0,5\sqrt{3} < 0,5\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} < 0,5$ .

*Решение:* Так как основание степени  $0 < 0,5 < 1$ , то приходим к неравенству

$$\sqrt{3} > \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} > 1,$$

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \sin^2 x} = \operatorname{ctg} x.$$

Остается решить неравенство  $1 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ . Построив график функции  $y = \operatorname{ctg} x$ , получим ответ.



$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z \quad \text{или на единичной окружности}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left( \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n \right), \quad n \in Z.$$

*Пример 7.* Решить неравенство  $(x^2 + x + 1) < 1$ .

*Решение:* Для любых действительных  $x$  квадратный трехчлен  $x^2 + x + 1$  положителен, а поэтому О.Д.З. этого

неравенства состоит из всех действительных  $x$ .

Так как обе части исходного неравенства положительны для всех  $x$ , то прологарифмировав это неравенство по основанию 10, получим равносильное ему неравенство

$$x \lg(x^2 + x + 1) < 0.$$

Оно распадается на две системы неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) < 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) > 0. \end{cases}$$

Решим первую, она равносильна системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -1. \end{cases} \Rightarrow \emptyset,$$

т.е. система несовместима.

Решим вторую систему, она равносильна системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x+1) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < -1. \end{cases} \Rightarrow x < -1.$$

*Ответ:*  $x \in (-\infty; -1)$ .

*Пример 8.* Решить неравенство  $8^x + 3 \cdot 2^{x+1} < 7$ .



*Решение:* Функция  $f(x) = 8^x + 3 \cdot 2^{x+1}$  возрастает на  $R$  как сумма двух возрастающих функций. Легко видно, что  $x = 0$  – единственный корень уравнения  $y = f(x) = 7$ . Следовательно, неравенство  $f(x) < 7$  удовлетворяется при  $x > 0$ .

*Ответ:*  $x \in (-\infty; 0)$

*Пример 9.* Решить неравенство  $(0,5)^{x-2} > 6$ .

*Решение:* Запишем неравенство в виде

$$2^{2-x} > 2 \cdot 3.$$

Прологарифмировав его по основанию 2, получим

$$2 - x > 1 + \log_2 3,$$

откуда  $x < 1 - \log_2 3$  (при логарифмировании знак неравенства сохраняется, так как основание  $2 > 1$ ).

*Ответ:*  $x \in (-\infty; 1 - \log_2 3)$

*Пример 10.* Решить неравенство  $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$ .

*Решение:* Заметим, что обе части данного неравенства положительны, следовательно, определены логарифмы этих частей, например, по основанию 2

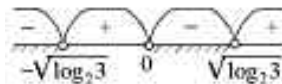
$\log_2 2^x < \log_2 3^{1/x}$ , т.е. эти неравенства равносильны.

$$x < \frac{1}{x} \log_2 3,$$

$$x - \frac{1}{x} \log_2 3 < 0,$$

$$\frac{x^2 - \log_2 3}{x} < 0,$$

$$\frac{(x - \sqrt{\log_2 3})(x + \sqrt{\log_2 3})}{x} < 0.$$



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -\sqrt{\log_2 3}) \cup (0; \sqrt{\log_2 3})$$

В заключении приведем задачу, в которой возникает трудность необычного характера. Единственный ход рассуждений приводит, казалось бы, к необходимости решить неравенство, которое в действительности решить школьными методами невозможно. К цели ведет обходной путь: мы докажем, что это неравенство выполняется для всех допустимых значений  $x$ .

*Пример 11.* Решить неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x)2^x + 2^{x+1}x\sqrt{2 - x^2}.$$

*Решение:* Естественно перенести все члены в одну часть и попытаться разложить ее на множители. Испробовав несколько способов группировки, можно привести данное неравенство к виду

$$\left(x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2}\right)\left(2^x x - 4\right) < 0.$$

**Это неравенство, как обычно сводится к двум системам неравенств**

$$\begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0, \\ 2^x x - 4 < 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} < 0, \\ 2^x x - 4 > 0. \end{cases}$$

Решить по отдельности каждое из неравенств системы, а затем взять общую часть полученных решений не получится, т.к. неравенства  $2^x x - 4 >< 0$  привычными школьными методами «не решаются». Поэтому приходится рассуждать несколько иначе: решить первое неравенство системы и исследовать знак выражения  $2^x x - 4$  на найденном множестве решений.

Неравенство  $x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0$  решается стандартным способом: оно выполняется при  $-1 < x \leq \sqrt{2}$ .

Теперь на этом промежутке рассмотрим функцию  $y = 2^x x - 4$ , нас интересует ее знак. Ясно, что если  $x \leq 0$ , то  $y < 0$ , другими словами на промежутке  $-1 < x \leq 0$  функция  $y$  отрицательна. Пусть теперь  $0 < x \leq \sqrt{2}$ . При этих значениях  $x$

$$2^x x - 4 \leq 2^x \sqrt{2} - 4 \leq 2^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 4 = 2^{\sqrt{2}+1/2} - 4 < 0,$$

поскольку  $\sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2$ .

Таким образом, мы доказали, что неравенство  $2^x x - 4 < 0$  справедливо на всем промежутке  $-1 < x \leq \sqrt{2}$ , так что это промежуток является решением первой системы.

Вторую систему можно было бы решить совершенно аналогично, но проще поступить по-другому. Как мы только что показали, функция  $y = 2^x x - 4$  отрицательна при всех  $x \leq \sqrt{2}$ . В частности она отрицательна в промежутке  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ , являющемся О.Д.З. первого неравенства. Следовательно, вторая система не имеет решений.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-1; \sqrt{2}\right]$$

### Примеры для самостоятельного решения

I. Найти наименьшее целое  $x$ .

$$1. 9^x > 8 \cdot 3^x + 9, \quad [3]$$

$$2. -2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9, \quad [-2]$$

$$3. 2^{x+3} + 10 \cdot 11^{x+2} < 11^{x+3} + 2^{x+2}, \quad [-1]$$

$$4. 10^{-x-1,5} > 10 \cdot (0,01)^x, \quad [3]$$

$$5. 11^{-0,00(5)^x} < \frac{1}{1331}, \quad [541]$$

$$6. 5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \dots \cdot 5^{2x} < (0,04)^{-28}, \quad [1]$$

$$7. 7^{x+2} + 15 \cdot 2^x > x^{x+6} + 45 \cdot 7^x. \quad [3]$$

II. Найти наибольшее целое  $x$ .

$$1. (x+1)^{x^2-36} < 1, \quad [5]$$

$$2. 2^{x^2} \cdot 49 > 16 \cdot 7^{x^2-2}, \quad [1]$$

$$3. 2^{x+1} + \frac{1}{2} 2^x < 5, \quad [0]$$

$$4. (0,2)^{\frac{x+2}{4-x}} \leq 0,04, \quad [3]$$

$$5. 4^{3x-1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{5-\frac{11}{3}x}. \quad [2]$$

III. Решить неравенство.

$$1. \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} < \frac{25}{4}, \quad [x \in (-\infty; -2) \cup (-2/5; \infty)]$$

$$2. \left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}, \quad [x \in (-7; \infty)]$$

$$3. \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0, \quad [x \in (-\infty; \log_{2/5} 2)]$$

$$4. 5 \cdot 3^{2x^2-3x-1} - 2 \cdot 3^{2x^2-3x} + 3^{2x^2-3x-3} \geq 72, \quad [x \in (-1; 5/2)]$$

$$5. 6 \cdot 2^{3x^2-2x} - 3 \cdot 2^{3x^2-2x+2} + 2^{3x^2-2x-2} \geq -184, \quad [x \in (-1; 5/3)]$$

$$6. \frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x, \quad [x \in (1; \infty)]$$

$$7. 4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0, \quad [x \in (-\infty; \log_{2/5} 2)]$$

$$8. 4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0, \quad [x \in (-1/2; 0) \cup (0; 1/2)]$$

$$9. 5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x+1}} + 5^{\sqrt{x}}, \quad [x \in (0; 1)]$$

$$10. 4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0, \quad [x \in (-\infty; 0) \cup (1/2; \infty)]$$

$$11. 0,4^{\log_2^2 x+1} < 6,25^{2-\log_2 x^3}, \quad [x \in (0; 2) \cup (32; \infty)]$$

$$12. 4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geq 0,$$

$$\left[ x \in (-\infty; -1) \cup \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup [3; \infty) \right]$$

$$13. 1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos x}},$$

$$\left[ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$14. 27^x - 1 > 2(9^x - 3^x) \quad [x \in (0; \infty)]$$

IV. Найти наибольшее отрицательное целое решение неравенства

$$1. 28 \cdot 2^{x-2} - 4^x < 10, \quad [-1]$$

$$2. \frac{(1/3)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0, \quad [-1]$$

$$3. (0,5)^{1/x} \geq 0,0625. \quad [-1]$$

V. Найдите все целые решения неравенства

$$1. 0,2 \leq 5^{x+4} \leq 125, \quad x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$2. 1 < 10^{x+1} \leq 1000000, \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$3. 0,04 \leq 5^{2-x} \leq 25. \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

VI. Решить неравенство. В ответе записать количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$1. (0,5)^{x^2+3x} \geq 0,125 \cdot 2^{-x}, \quad [5]$$

$$2. (1,25)^{1-x^2} - (0,4096)^{1+x} > 0. \quad [5]$$

VII. Решить показательно-степенное неравенство

$$1. (x-3)^{2x^2-7x} > 1, \quad x \in (3; 3,5) \cup (4; +\infty)$$

$$2. (x^2 - 2,5x + 1)^{x+1} \leq 1. \quad x \in (-\infty; -1) \cup (0; 0,5) \cup (2; 2,5)$$



## XI. Системы показательных и логарифмических неравенств

*Пример.* Решить систему неравенств

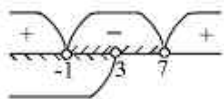
$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

В ответ записать длину промежутка, на котором выполняется система неравенств.

*Решение:*

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{7/2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{7/2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 3,5 < 3,5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 7 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ (x+1)(x-7) < 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 3).$$



Длина интервала  $(3 - (-1)) = 4$ .

*Ответ:* 4.

### Примеры для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}} = 2, \\ (x+y) \cdot 4^x = 64. \end{cases} \quad [(2, 2)]$$

2. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0,5. \end{cases} \quad [(4, 1)]$$

3. Найти целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} (x^2 + 8)^{\log_8 x} < (6x)^{\log_8 x}, \\ x < 1. \end{cases} \quad [3]$$