Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы

Учебное пособие для абитуриентов

Томск 2004

I. Логарифмы и их свойства

Пусть число $a > 0$ и $a \neq 1$. Число x называется *логарифмом* числа N по основанию a, если $a^x = N$, обозначают $x = \log_a N$. Для обозначения десятичных логарифмов используют запись $\log_{10} N = = \lg N$, а для обозначения натуральных логарифмов $\log_e N = \ln N$.

Прежде всего отметим основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a N} = N$, справедливое для любых N и a таких, что $N > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Отметим свойства логарифмов, часто употребляемые при решении задач:

1. $\log_a a = 1;$
2. $\log_a 1 = 0;$
3. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N,$ $\quad (M > 0;\ N > 0);$
4. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$ $\quad (M > 0;\ N > 0);$
5. $\log_a M^{\beta} = \beta \log_a M,$ $\quad (M > 0);$
6. $\log_a M = \log_{a^n} M^n,$ $\quad (M > 0);$
7. $\log_{a^{\beta}} N^{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} \log_a N,$ $\quad (N > 0);$

8. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, $(N > 0)$;

9. $\log_b a \cdot \log_a b = 1$;

10. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $(a > 0,\ c > 0)$;

11. $\log_a \sqrt[n]{N} = \dfrac{1}{n} \log_a N$, $(N > 0)$.

Рассмотрим несколько примеров на использование основных свойств логарифмов. Навыки работы с логарифмическими и показательными выражениями являются обязательными для решения показательных и логарифмических уравнений неравенств и систем.

Пример 1. Вычислить $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Решение: Используя свойства логарифмов, решаем

$$\log_3 \log_4 4^{1/9} = \log_3\left(\frac{1}{9}\log_4 4\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3 = -2.$$

Ответ: -2.

Пример 2. Вычислить $\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25}9}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)$.

Решение: Учитывая свойства логарифмов, решаем

$$\left(27^{\log_3 2}+5^{\log_5 3}\right)\left(81^{\log_9 4}-2^{3\log_2 3}\right)=$$
$$=\left(3^{3\log_3 2}+3\right)\left(3^{4\log_3 2}-2^{\log_2 3^3}\right)=$$
$$=\left(3^{\log_3 2^3}+3\right)\left(3^{\log_3 2^4}-3^3\right)=$$
$$(8+3)(16-27)=11\cdot(-11)=-121.$$

Пример 3. Вычислить $\log_6 16$, если $\log_{12}27 = a$.

Решение: Применяя последовательно формулы (5), (9) и (3), получаем

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6}=\frac{4}{\log_2 2\cdot 3}=\frac{4}{1+\log_2 3}.$$

Теперь видно, что для определения $\log_6 16$ нам надо знать, чему равен $\log_2 3$.

Найдем его из условия $\log_{12}27 = a$. Применяя последовательно формулы (5), (9), (3) и (5), (9), имеем цепочку преобразований

22:29

$$a = \log_{12}27 = 3\log_{12}3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} = \frac{3}{1+\dfrac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}.$$

Следовательно, $\log_2 3 = \dfrac{2a}{3-a}$.

Окончательно имеем $\log_2 16 = \dfrac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}} = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить:

1. $\log_2 16$; [4]

2. $\log_3 \frac{1}{81}$; [-4]

3. $\log_{0,2} 0,4$; [2]

4. $\log_{\sqrt{3}} 1$; [0]

5. $\log_4 2 + \log_4 8$; [2]

6. $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$; [1]

7. $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$; [2]

8. $10^{1+\lg 3}$; [30]

9. $\frac{1}{3}\left(1+9^{\log_9 7}\right)^{\log_8 3}$; [1]

10. $2^{2-\log_2 5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; [1]

11. $\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2}$; [2]

12. $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; [1]

13. $\log_3\left[(\log_2 5)(\log_5 8)\right]$; [1]

14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}} + 125^{\log_{25} 6}$; [$650 + 6\sqrt{6}$]

15. $\left(2^{2+\frac{1}{\log_5 2}}+25^{\frac{1}{2\log_2 5}}+3\right)^{\frac{1}{2}}$; [5]

16. $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}}+4\cdot 5^{\log_5^2 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16$; [1]

17. $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}}-5^{\frac{1}{\log_5 3}}+7^{\log_7 49}\right)^{1/2}$; [7]

18. Зная, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$, найти $\lg 56$. [$a(b + 3)$]

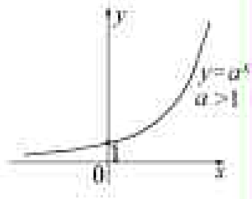
19. $3^{\sqrt{\log_3 2}}$; [1/2]

II. Показательная функция, ее свойства и графики

Функция, заданная формулой вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется *показательной*.

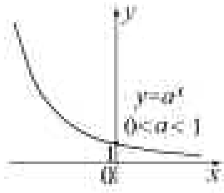
1. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ обладает следующими свойствами:

- область определения $x \in (-\infty; +\infty)$;
- область значения $y \in (0; +\infty)$;
- функция возрастающая;
- если $x > 0$, то $a^x > 1$;
  $x = 0$, то $a^x = 1$;
  $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.



2. Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими свойствами:

- область определения $x \in (-\infty; +\infty)$;
- область значения $y \in (0; +\infty)$;
- функция убывающая;
- если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;
  $x = 0$, то $a^x = 1$;
  $x < 0$, то $a^x > 1$.



22:29

Основные свойства степеней

1. $a^x a^y = a^{x+y}$;
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;
5. $a^0 = 1$;
6. $a^1 = a$;
7. $1^x = 1$;
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;
9. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Уравнение называют *показательным*, если оно содержит степень, показатель которой включает неизвестную величину, а основание степени известно.

Типы показательных уравнений:

1. Уравнение вида: $a^{f(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$

Пример. $5^{(x-2)(4x-3-x^2)} = 1.$

Решение: $5^{(x-2)(-x^2+4x-3)} = 5^0$

$(x-2)(-x^2+4x-3) = 0$

$x - 2 = 0; \qquad -x^2 + 4x - 3 = 0;$

$x_1 = 2. \qquad x^2 - 4x + 3 = 0;$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1;$$

$x_2 = 1; \qquad x_3 = 3.$

Ответ: $\{1, 2, 3\}$

22:29

Примеры для самостоятельного решения

1. $3^{x^2-5x+6}=1;$ $[x_1 = 2,\ x_2 = 3]$
2. $4^{(1-x)(x^2-5x+6)}=1;$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3]$
3. $9^{3-5x}\cdot 7^{5x-3}=1;$ $[x = 3/5]$
4. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=1;$ $\left[x_{1,2}=-\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{193}}{4}\right]$
5. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2};$ $\left[x_{1,2}=\pm\sqrt{3}\right]$

22:29

2. Уравнение вида $a^{f(x)} = b$.

Его решением при $a > 0$ и $b > 0$, $a \neq 1$, является $f(x) = \log_a b$.

В частности, если $a^x = b$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, то $x = \log_a b$.

Пример 1. Решить уравнение $2^{4x} = 5$.

Решение: Обе части уравнения положительны, логарифмируем по основанию 2

$$\log_2 2^{4x} = \log_2 5,$$

$$4x \cdot \log_2 2 = \log_2 5,$$

$$4x = \log_2 5,$$

$$x = \frac{\log_2 5}{4}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\log_2 5}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 4$.

Решение: Возведем правую и левую части уравнения в квадрат

$$\left(7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x\right)^2 = 4^2,$$

$$7^x 3^{2x} = 16,$$

$$7^x 9^x = 16,$$

$$63^x = 16,$$
$$\log_{63} 63^x = \log_{63} 16,$$
$$x = \log_{63} 16.$$

Ответ: $x = \log_{63} 16.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $5 \cdot 2^x = 3;$ $\qquad [\log_2 \frac{3}{5}]$

2. $6^{\frac{x}{3}} \cdot 2^x = 5;$ $\qquad [3\log_{48} 5]$

3. Уравнения, приводящие к простейшему виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a \neq 1$, что равносильно $f(x) = \varphi(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

Решение: Заметим, что $\frac{7}{3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ и перепишем исходное уравнение в виде:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3},$$

$$3x - 7 = -7x + 3,$$

$$10x = 10,$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 2. Решить уравнение $0{,}125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Решение: Преобразуем уравнение с основанием 2. Получим

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-1/2}\right)^{-x},$$

или
$$2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-1/2}\right)^{-x},$$

$$2^{-3+2(2x-8)}=2^{(-2-0,5)(-x)},$$

$$2^{-3+4x-16}=2^{2,5x},$$

$$-3+4x-16=2,5x,$$

$$(4-2,5)x=19,$$

$$x=\frac{19}{1,5}=\frac{19\cdot 2}{3}=\frac{38}{3}.$$

Ответ: $x = 38/3$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9}-6.$$

Решение: Заметим, что числа $3-2\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$ обратны по величине

$$3-2\sqrt{2}=\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}.$$

Поэтому, обозначив $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9}=t,\ t>0$, перепишем исходное уравнение в виде $t+\dfrac{1}{t}=6$,

$$t^2-6t+1=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=3\pm\frac{\sqrt{32}}{2}=3\pm\sqrt{\frac{32}{4}}=3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2}.$$

Равенства $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9}=3+2\sqrt{2}$,

$\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9}=3-2\sqrt{2}$

приводят к двум квадратным уравнениям относительно x:

$$x^2-6x+9=-1,\qquad x^2-6x+9=1.$$

Первое из них имеет мнимые корни, второе же дает два решения уравнения

$$x_1=4,\qquad x_2=2.$$

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}=2^{x+5}$; [$x$ = -1]

2. $3^{\frac{2-x}{x-5}} = \frac{1}{9}$; [$x = 8$]

3. $3^{\frac{5-2x}{x+1}} = \frac{1}{27}$; [$x = -8$]

4. $\sqrt{3^x}\sqrt{5^x} = 225$; [$x = 4$]

5. $\sqrt{27^{2x+6}} = \sqrt[3]{9^{4x+3}}$; [$x = -21$]

6. $125 \cdot \sqrt[x]{0,2} = 25^x$; [$x = 1$]

7. $5 \cdot 2^{x^2-x-1} - 5^{x^2-x} = 0$; $\left[x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

8. $4^{4(x+1)} = \sqrt[5]{16^{x+100}}$; [$x = 10$]

9. $5^{|4x-6|} = 25^{2x-4}$; [$x \in \varnothing$]

10. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$; [$x_1 = 2$, $x_2 = -2$]

11. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$; [$x_1 = 2$, $x_2 = -2$]

12. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x}=10;$ $[x_1 = 2,\ x_2 = -2]$

13. $5^{2+4+6+...+2x}=0{,}04^{-23},$ где $x>0;$ $[x = 7]$

14. $5\cdot(0{,}04)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{0{,}5\sin 2x};$ $\left[x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\right.$

$\left.x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\right]$

15. $3^{8x^2\operatorname{ctg}\pi x+15x\operatorname{ctg}\pi x}=3^{2\operatorname{ctg}\pi x};$ $\left[x_1=\dfrac{1}{8},\ x_2=\dfrac{1}{2}+k,\ k\in Z\right]$

16. $3^{1+\sin x+...+\sin^n x+...}=\sqrt[3]{9};$ $\left[x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\right]$

17. $2^{-1+\cos x-\cos^2 x+...+(-1)^{n+1}\cos^n x+...}=\sqrt[3]{0{,}25};$ $\left[x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\right]$

18. $\left(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4}\right)^{x}=13{,}5;$ $[x = 3]$

19. $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}}-0{,}04^{1-x}=0;$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 0{,}25]$

20. $\sqrt{2^{x}\sqrt[3]{4^{x}\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2};$ $[x_1 = -0{,}2,\ x_2 = 3]$

22:29

21. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-16^{\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}}=0;$ $[x = 25]$

22. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^{5};$ $[x_1 = 8,\ x_2 = -7]$

4. Уравнения, приводящие к алгебраическим путем введения новой переменной (метод подстановки).

Пример 1. Решить уравнение: $5^{2x-1}+5^{x+1}=250.$

Решение: Запишем исходное уравнение в виде

$$5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0.$$

Сделаем замену: $5^x=t,\ \ t>0.$

$$\frac{1}{5}t^2+5t-250=0,$$

$$t_1=-50\ \notin \text{ О.Д.З.}$$

$$t_2=25\ \in \text{ О.Д.З.}$$

$$5^x=25,\quad 5^x=5^2,\quad x=2.$$

Ответ: $x=2.$

Пример 2. Решить уравнение: $4^{\sqrt{x^2-2}+x}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$

Решение: О.Д.З. $x^2-2\geq 0,$

$$x^2\geq 2,\quad x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty).$$

Сделаем замену: $2^{\sqrt{x^2-2}+x}=t,\quad t>0.$

Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0,$$

корнями которого будут $t_1 = 4 \in (0; +\infty)$,

$t_2 = -3/2 \notin (0; +\infty)$.

$$2^{\sqrt{x^2-2}+x} = 4,$$

$$\sqrt{x^2 - 2} + x = 2,$$

$$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x, \qquad 2 - x > 0, \qquad x < 2.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$4x = 6, \qquad x = 3/2 \in \text{О.Д.З.}$$

Ответ: $x = 3/2$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0.$

Решение: О.Д.З. $x \in N$,

$$64^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0,$$

$$2^{\frac{3\cdot 2}{x}} - 2^{\frac{3}{x}+3} + 12 = 0.$$

Сделаем замену $\quad 2^{\frac{3}{x}} = t, \quad t > 0.$

Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 8t + 12 = 0,$$

корнями которого будут $\quad t_1 = 2; \quad t_2 = 6.$

$$2^{\frac{3}{x}} = 2, \;\Rightarrow\; \frac{3}{x} = 1, \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \in N$$

$$2^{\frac{3}{x}} = 6.$$

Прологарифмируем с основанием 2:

$$\frac{3}{x} = \log_2 6 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{3}{\log_2 6} \notin N.$$

Ответ: $x = 3$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $4^{\sqrt{3x^2 - 2x} + 1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2 - 2x}}$, $\quad [x_1 = 1; x_2 = -1/3]$
2. $9^{x^2 - 1} - 36 \cdot 3^{x^2 - 3} + 3 = 0$, $\quad [x_{1,2} = \pm\sqrt{2}; x_{3,4} = \pm 1]$

22:29

3. $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0,$ [$x = 2$]

4. $3^{1-x} + 3^{1+x} + 9^{x} + 9^{-x} = 8,$ [$x = 0$]

5. $64^{\frac{1}{x}} - 2^{2+\frac{3}{x}} + 12 = 0,$ [$x_1 = 3$; $x_2 = \log_6 8$]

6. $2^{3-x} + 2^{x} = 9,$ [$x_1 = 0$; $x_2 = 3$]

7. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26,$ [$x_1 = 1$; $x_2 = 3$]

8. $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0,$ [$x_1 = 1$; $x_2 = 0$]

9. $2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17,$ [$x = -3$]

10. $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0,$ [$x = 4$]

11. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2,$ [$x = 0$]

12. $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}},$ [$x_{1,2} = \pm\ 1/2$]

13. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0,$ [$x_1 = 3$; $x_2 = 3\ \log_6 2$]

14. $4^{1-(x+1)^2} - 3 \cdot 2^{2-(x+1)^2} + 8,$
[$x = -1$]

15. $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6,$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \right]$

5. Уравнения вида: $A_0 a^{bx+m_0} + A_1 a^{bx+m_1} + \ldots + A_n a^{bx+m_n} = B$
решаются методом вынесения общего множителя, где A_0, A_1, … A_n, m_0, m_1, … m_n – постоянные величины.

Пример 1. Решить уравнение $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.
Решение: после вынесения за скобку в левой части 6^x, в правой 2^x, получим

$$6^x(1+6) = 2^x(1+2+4),$$

$$6^x = 2^x,$$

$$(2\cdot 3)^x = 2^x,$$

$$2^x(3^x - 1) = 0,$$

$$2^x \neq 0, \qquad 3^x = 1,$$

$$3^x = 3^0.$$

Ответ: $x = 0$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}$, [$x = 2$]
2. $5^{2x+1} - 3\cdot 5^{2x-1} = 550$, [$x = 3/2$]

22:29

3. $35\cdot 3^{x^2}-35\cdot 5^{2x}-3^{x^2}+5^{2x}=0,$ $\left[x_1=0,\quad x_2=\dfrac{2\lg 5}{\lg 3}\right]$

4. $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=31,$ $[x = 1]$

5. $7^{x+2}-14\cdot 7^{x}=5,$ $[x = -1]$

6. $3^{x}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-x}=24,$ $[x = 3]$

7. $4\cdot 3^{x+2}+5\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x}=5,$ $[x = -2]$

8. $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$, $[x_{1,2} = \pm 1/2,\ x \in [3; +\infty)]$

6. Однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$$

решаются путем деления либо на a^x, либо на b^x, либо на $(a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}})$.

Пример 1. Решить уравнение $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.
Решение: Разделим обе части уравнения на 4^x:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

Обозначим $(3/2)^x = t$, $t > 0$. Тогда последнее уравнение запишется так:

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

$$t_1 = -2 \notin (0; +\infty), \qquad t_2 = 1 \in (0; +\infty).$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $25^x - 12 \cdot 2^x - 6{,}25 \cdot 0{,}16^x = 0$.
Решение: Запишем уравнение в виде:

$$5^{2x} - 12 \cdot 2^x - 6{,}25 \cdot 0{,}4^{2x} = 0.$$

Замечая, что $2 = 5 \cdot 0{,}4$, а следовательно, $2^x = 5^x \cdot 0{,}4^x$, приходим к уравнению

$$5^{2x} - 12 \cdot 5^x \cdot 0{,}4^x - 6{,}25 \cdot 0{,}4^{2x} = 0,$$

которое является однородным степени 2 относительно 5^x и $0{,}4^x$. Разделив его на $0{,}4^x$ и обозначив $t = (5/0{,}4)^x = (12{,}5)^x$, $t > 0$ получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 12t - 6{,}25 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 6{,}25}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{12 \pm 13}{2},$$

$$t_1 = \frac{25}{2} = 12{,}5 \in \text{О.Д.З.} \qquad t_2 = -\frac{1}{2} \notin \text{О.Д.З.}$$

$$(12{,}5)^x = 12{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $16^x - 5 \cdot 8^x + 6 \cdot 4^x = 0,$ $[x_1 = 1;\ x_2 = \log_2 3]$
2. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x},$ $[x = 2]$
3. $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0,$ $[x = 1]$
4. $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0,$ $[x_1 = 1;\ x_2 = 0]$
5. $75 \cdot 9^x - 152 \cdot 15^x + 45 \cdot 25^x = 0,$ $[x_1 = -1;\ x_2 = 2]$
6. $9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}},$ $[x = -1/2]$

Использование различных свойств логарифмов

Пример 1. Решить уравнение: $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18.$

Решение. $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Известно, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, перепишем уравнение

$$3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 18 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2, \quad x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Решить уравнение: $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = 3/4.$

Решение. $x > 0$. Перейдем к основанию 16, используя свойство $\log_a b = \log_{a^n} b^n$.

$$\log_{16} x^4 - \log_{16} x^2 + \log_{16} x = 3/4 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\log_{16} x - 2\log_{16} x + \log_{16} x = 3/4 \quad \Leftrightarrow$$

$$3\log_{16} x = 3/4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{16} x = 1/4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \in (0; \infty).$$

Ответ: 2.

Метод логарифмирования

(используют при решении показательно-логарифмических уравнений).

Пример 3. Решить уравнение: $x^{\lg^2 x} + \lg x^5 - 12 = 10^{2\lg x}$.

Решение. О.Д.З. $x > 0$. Прологарифмируем уравнение по основанию 10

$$\lg x^{\lg^2 x + 5\lg x - 12} = \lg 10^{2\lg x} \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lg^2 x + 5\lg x - 12)\lg x = 2\lg x \quad \Leftrightarrow$$

$$\lg x\,(\lg^2 x + 5\lg x - 14) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = 0, \\ \lg^2 x + 5\lg x - 14 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 10^0 = 1, \\ \lg x = 2 \quad \text{и} \quad \lg x = -7. \end{cases}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 100,\quad x_3 = 10^{-7}.$$

Ответ: 1, 100, 10^{-7}.

III. Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств необходимо помнить, что

1. функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) является убывающей, если $0 < a < 1$.
2. и возрастающей, если $a > 1$.

Поэтому неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

1. при $0 < a < 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Рассмотрим примеры решения логарифмических неравенств.

Пример 1. Решить неравенство: $\log_4 x - \log_x 4 \leq 1{,}5$. В ответе указать наибольшее x.

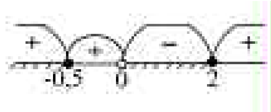
Решение. Запишем неравенство в виде $\log_4 x - \dfrac{1}{\log_4 x} \leq \dfrac{3}{2}$ и обозначим $y = \log_4 x$.

В результате получим неравенство

22:29

$$y-\frac{1}{y}\le\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\quad y-\frac{1}{y}-\frac{3}{2}\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2y^2-3y-2}{2y}\le 0.$$

Решаем методом интервалов неравенство:



$y_1 = 0$, $y_2 = -0{,}5$, $y_3 = 2$.

$y \in (-\infty; -0{,}5] \cup (0; 2]$.

Отсюда соответственно находим $\log_2 x \le -0{,}5$, $0 < x \le 0{,}5$.

$$0 < \log_2 x \le 2, \quad 1 < x \le 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2. Найти наибольшее целое решение неравенства:

$$\log_{0,2}(5x-1) > \log_{0,2}(2x+5).$$

Решение. $0 < 0{,}2 < 1$. Составим и решим систему

$$\begin{cases}5x-1>0,\\ 2x+5>0,\\ 5x-1<2x+5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1/5,\\ x>-5/2,\\ 3x<6.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1/5,\\ x>-5/2,\\ x<2.\end{cases}$$

Имеем

$x \in (1/5; 2)$.

Ответ: 1.

Пример 3. Найти наибольшее целое решение неравенства

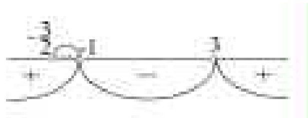
$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x+3).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 > 2x+3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 < 2x+3. \end{cases}$

Решим первую систему: $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 - 2x - 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3/2 < x < -1, \\ (x-3)(x+1) > 0. \end{cases} \Rightarrow$

$-3/2 < x < -1.$



Теперь решим вторую систему:

$$\begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ (x-3)(x+1) < 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$-1 < x < 3.$

Решение будет: $x \in (-3/2; -1) \cup (-1; 3)$.

Ответ: 2.

Пример 4. Решить неравенство: $(0{,}5)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - \frac{4}{5})} < 1.$

Решение. Обозначим $y = \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - \frac{4}{5})$.

$$0{,}5^y < 0{,}5^0, \quad y > 0.$$

$$\log_3 \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - \frac{4}{5}) > 0 = \log_3 1.$$

$$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - \frac{4}{5}) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - \frac{4}{5} > 0, \\ x^2 - \frac{4}{5} < \frac{1}{5}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > \frac{4}{5}, \quad |x| > \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ x^2 < 1. \quad |x| < 1. \end{cases}$$

$x \in (-1;\ -\frac{2}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1).$

Ответ: $x \in (-1;\ -\frac{2}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1).$

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: $\sqrt[12]{7^{-x}} = \log_{0,3} 0{,}3^{\frac{1}{343}}$.

Ответ: 36.

2. Решить уравнение: $\log_2 (1 + 3\log_2 x) = 2$.

Ответ: 2.

3. Найти больший корень уравнения:

$$2\lg^2 x + 2\log_5^2 0{,}2 = 1{,}5 + 1{,}5\lg x.$$

Ответ: 10.

4. Решить уравнение: $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg \frac{5}{3}$. В ответ записать $3x$.

Ответ: 2.

5. Решить уравнение: $(0{,}2)^{1+\log_2 x+\log_2^2 x+\ldots} = 5, \quad |\log_2 x| < 1$.

Ответ: 4.

6. Решить уравнение: $5^{\log_3 x} + x^{\log_3 5} = 50\,(4 - 2^{0{,}5\log_2 9})$.

Ответ: 9.

7. Найти больший корень уравнения: $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100\,(x+1)$.

Ответ: 99.

8. Решить уравнение: $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$. В ответе указать больший корень.

Ответ: 100.

9. Решить уравнение: $\sqrt{1+\log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$. В ответ записать $9x$.

Ответ: 1.

10. Решить систему: $\begin{cases} x^y = 8, \\ \log_3 y + 2\log_3 \log_2 x = 2. \end{cases}$

Ответ: (8; 1).

11. Решить уравнение: $\lg^{-1} x = 6 - \lg^2 100 + \lg x^{-1}$.

Ответ: 10.

12. Найти наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:
$\log_{0,82}\left(\dfrac{x^2-7}{x-4}\right) < 0$.

Ответ: 6.

13. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_9 27$.

Ответ: $-\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{23}{16}$.

14. Решить неравенство: $\log_{100} x^2 + \log_{10}^2 x < 2$.

Ответ: $\dfrac{1}{100} < x < 10$.

15. Решить неравенство: $\log_4(5-3^x)\cdot\log_2\dfrac{5-3^x}{8}\geq -1.$

Ответ: $x \leq 0$; $1 \leq \log_3 5$.

16. Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

$$(x-3)\log_3 0{,}7 > 0.$$

Ответ: 2.

17. Найти наименьшее значение x из области определения функции:

$$y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}.$$

Ответ: 1.

18. Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}<1.$$

Ответ: 3.

19. Найти наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству: $\lg x - \lg (x+2) > \lg 3 - \lg (x^2-4)$.

Ответ: 4.

20. Найти целое решение системы неравенств:

$$(x^2+8)^{\log_8 x} < 6x^{\log_8 x} \quad \text{и} \quad x>1.$$

Ответ: 3.

22:29

21. Найти наибольшее целое решение x, удовлетворяющее неравенству: $\lg \lg x + \lg (\lg x^3 - 2) < 0$.

Ответ: 9.

22. Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

Ответ: –3.

IV. Показательно-степенные уравнения

Уравнение называется *показательно-степенным*, если оно содержит неизвестную величину в основании и в показателе.

Такие уравнения решаются путем логарифмирования с произвольным основанием с последующим рассмотрением случаев, когда основание равно 0 и 1, при этом необходимо помнить, что выражение 0^{α} имеет смысл лишь при $\alpha > 0$.

Пример 1. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

Решение 1. $|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}$.

Прологарифмируем уравнение с основанием e

$$\ln|x-3|^{\frac{z+1}{4}} = \ln|x-3|^{\frac{x-2}{3}},$$

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)\ln|x-3| - \left(\frac{x-2}{3}\right)\ln|x-3| = 0,$$

$$\ln|x-3| \cdot \left(\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3}\right) = 0,$$

$$\ln|x-3| \cdot \left(\frac{3x+3-4x+8}{12}\right) = 0,$$

$$\ln|x-3|\cdot\left(\frac{11-x}{12}\right)=0,$$

$$\left(\frac{11-x}{12}=0\right) \quad\Rightarrow\quad x_1 = 11.$$

$$\ln|x-3|=0, \qquad |x-3|=e^0, \qquad |x-3|=1,$$

$$x-3=\pm 1, \quad x = 3 \pm 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2.$$

Заметим, что левая и правая части уравнения совпадут при $x_4 = 3$ $\left(0^{\frac{1}{4}} \equiv 0^{\frac{1}{3}}\right)$.

Ответ: $x_1 = 11$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Решение 2. При решении этого показательно-степенного уравнения возможны три случая:

1. $|x-3|=0$; 2. $|x-3|=1$; 3. $\begin{cases}|x-3|>0,\\ |x-3|\neq 1.\end{cases}$

Рассмотрим эти случаи:

1. $|x-3|=0$. В этом случае исходное уравнение примет вид:

22:29

$$0^{\frac{x+1}{4}} \equiv 0^{\frac{x-2}{3}}.$$

Следовательно $x_1 = 3$ – решение, т.к. удовлетворяет О.Д.З.:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} > 0; \\ \dfrac{x-2}{3} > 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x > -1; \\ x > 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 2.$$

(выражение 0^{α} имеет смысл лишь при $\alpha > 0$).

2. $|x-3| = 1$. В этом случае исходное уравнение примет вид:

$$1^{\frac{x+1}{4}} = 1^{\frac{x-2}{3}}, \text{ т.е. } 1 \equiv 1.$$

Значит корни уравнения $|x-3| = 1$ являются корнями исходного уравнения

$x - 3 = \pm 1$,

$x = 3 \pm 1$, $\qquad x_2 = 4$; $\qquad x_3 = 2$.

3. Если $|x-3| > 1$ b $|x-3| \neq 1$, то из начального уравнения заключаем, что

$$\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3},$$

$$3x + 3 = 4x - 8,$$
$$x_4 = 11.$$

x_4 удовлетворяет системе $\begin{cases} |x-3| > 0, \\ |x-3| \neq 1. \end{cases}$

Подстановкой убеждаемся, что $x_4 = 11$ – корень.

Ответ: $x_1 = 11$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Пример 2. Решить уравнение $x^{\log_3 x^2} = 9.$ В ответе указать больший корень.

Решение: Прологарифмируем обе части данного уравнения по основанию 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x^2} = \log_3 9,$$
$$2\log_3 x \cdot \log_3 x = 2,$$
$$2\log_3^2 x = 2,$$
$$\log_3^2 x = 1,$$
$$\log_3 x = \pm 1.$$
$$\log_3 x = 1, \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 3.$$
$$\log_3 x = -1, \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1/3.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 3. Решить уравнение $\left(x^{\lg x}\right)^2 - 100x^3 = 0$. В ответе записать больший корень.

Решение: О.Д.З.: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Перепишем уравнение в виде:

$$x^{2\lg x} = 100x^3.$$

Прологарифмируем обе части последнего уравнения по основанию 10.

$$2\lg x \cdot \lg x = 2 + 3\lg x,$$

$$2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0.$$

Обозначим $\lg x = t$: $\quad 2t^2 - 3t - 2 = 0,$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4},$$

$$t_1 = 2, \qquad t_2 = -1/2.$$

Откуда, $\quad \lg x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 100,$

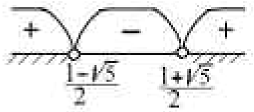
$$\lg x_2 = -1/2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $x = 100$.

Пример 4. Решить уравнение $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1.$

Решение 1: О.Д.З. $\quad x^2 - x - 1 > 0,$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$



$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6\right)$$

Прологарифмируем уравнение с основанием *e*

$$\ln\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = \ln 1,$$

$$\left(x^2 - 1\right)\ln\left(x^2 - x - 1\right) = 0,$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad \ln\left(x^2 - x - 1\right) = 0.$$

$$x_1 = 1, \quad x^2 - x - 1 = e^0,$$

$$x_2 = -1, \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

$x_1 = 1 \notin$ О.Д.З.

Ответ: $x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$

Решение 2: $\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=\left(x^2-x-1\right)^0$.

1. $x^2-x-1=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0,$

$x_1=-1; \quad x_2=2.$

2. $\begin{cases} x^2-x-1>0, \\ x^2-x-1\neq 1, \\ x^2-1=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right), \\ x\neq -1; \quad x\neq 2, \\ x=1; \quad x=-1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varnothing.$

Ответ: $x_1=2, \quad x_2=-1.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\left|x-3\right|^{3x^2-10x+8}=1,$ $\quad$ $[x_1=2,\ x_2=4/3,\ x_3=4]$

2. $\left|x-2\right|^{10x^2-1}=\left|x-2\right|^{3x},$ $\quad$ $[x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=1/2]$

3. $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1,$ $[x_1 = 4,\ x_2 = 5]$

4. $x^{\log_3 x^3} = 27,$ $[x = 3]$

5. $(x-3)^{x^2} = (x-3)^x,$ $[x_1 = 4,\ x_2 = 3]$

6. $x^{2+\log_3 x} = 3^8,$ $[x_1 = 9,\ x_2 = 3^{-4}]$

7. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x,$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 4]$

8. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \left(\sqrt{x}\right)^x,$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 8]$

9. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1,$ $[x_1 = 1/3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4]$

10. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x-1} = 5,$ $[x_1 = 1/5,\ x_2 = 25]$

11. $x^{\lg x+7} = 10^{(\lg x+1)4},$ $[x_1 = 10,\ x_2 = 10^{-4}]$

12. $x^{\log_a x} = \left(a^{\pi}\right)^{\log_a^3 x},$ $[x_1 = 1,\ x_2 = a^{1/\pi}]$

13. $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}} = |x-4|^2,$ $[x_1 = -4,\ x_2 = -1]$

14. $|2-x|^{\sqrt{x^2-x-2}} = |2-x|^2,$ $[x_1 = -2,\ x_2 = 3]$

15. $|2x+1|^{\sqrt{2x^2-5x-2}} = |2x+1,|$ $[x = 3]$

16. $\left|3x-2\right|^{\sqrt{2x-3x^2}}=1,$ [$x = 0$]

17. $\left|1-3x\right|^{\sqrt{5x^2+7x-2}}=\left|1-3x\right|^2.$ [$x_1 = -2$, $x_2 = 3/5$]

V. Показательные уравнения, решаемые логарифмированием обеих частей уравнения

Пример 1. Решить уравнение $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$.

Решение: Обе части уравнения положительны. Логарифмируем по основанию 2, получаем уравнение

$$2 + (x-1)\log_2 9 = \log_2 3 + \frac{1}{2}(2x+1),$$

которое, очевидно, имеет те же решения, что и исходное уравнение, т.е. равносильно ему. Преобразуя это уравнение и учитывая, что $\log_2 3 = \frac{1}{2}\log_2 9$, получаем

$$x(\log_2 9 - 1) = \frac{3}{2}(\log_2 9 - 1),$$

$$(\log_2 9 - 1)(x - 3/2) = 0,$$

$$x = 3/2, \quad \text{т.к. } \log_2 9 - 1 \neq 0.$$

Ответ: $x = 3/2$.

Пример 2. Решить уравнение $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$

Решение: Прологарифмируем обе части исходного уравнения по основанию 3

$$\log_3\left(3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}}\right) = \log_3 6,$$

$$x + \log_3 2^{\frac{3x}{x+2}} = \log_3(2\cdot 3),$$

$$x + \frac{3x}{x+2}\log_3 2 = \log_3 2 + 1.$$

После преобразований последнее уравнение приводится к виду:

$$x^2 + (1 + 2\log_3 2)x - 2(1 + \log_3 2) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - 2\log_3 2 \pm \sqrt{(1 - 2\log_3 2)^2 - 8(1 + \log_3 2)}}{2} =$$

$$= \frac{-1 - 2\log_3 2 \pm \sqrt{(2\log_3 2 + 3)^2}}{2} = \frac{-1 - 2\log_3 2 \pm |2\log_3 2 + 3|}{2}.$$

Поскольку $\log_3 2 > 0$, т.к. 3 и 2 находятся по одну сторону от 1, то

$$x_{1,2} = \frac{-1 - 2\log_3 2 \pm (2\log_3 2 + 3)}{2},$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -2 - 2\log_3 2 = -2(1 + \log_3 2) =$$

$$= -2(\log_3 3 + \log_3 2) = -2\log_3 6.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2\log_3 6.$

Пример 3. Решить уравнение $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500.$

Решение: О.Д.З.: $x \in N.$

Возведем правую и левую части уравнения в степень x

$$5^{x^2} \cdot 8^{x-1} = 500^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3(x-1)} = (125 \cdot 4)^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3x-3} = (5^3 \cdot 2^2)^x,$$

$$5^{x^2} \cdot 2^{3x-3} = 5^{3x} \cdot 2^{2x}.$$

Прологарифмируем по основанию 5 правую и левую части данного соотношения:

$$\log_5(5^{x^2} \cdot 2^{3x-3}) = \log_5(5^{3x} \cdot 2^{2x}),$$

$$\log_5 5^{x^2} + \log_5 2^{3x-3} = \log_5 5^{3x} + \log_5 2^{2x},$$

$$x^2 + (3x-3)\log_5 2 = 3x + 2x\log_5 2,$$

$$x^2 - 3x + x\log_5 2 - 3\log_5 2 = 0,$$

$$x^2 - (3 + \log_5 2)x - 3\log_5 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 - \log_5 2 \pm \sqrt{(3 - \log_5 2)^2 + 4 \cdot 3\log_5 2}}{2} =$$

$$=\frac{3-\log_5 2 \pm \sqrt{\log_5^2 2+6\log_5 2+9}}{2}=\frac{3-\log_5 2 \pm (3+\log_5 2)}{2}.$$

$$x_1 = 6/2 = 3 \in N, \qquad x_2 = -\log_5 2 \notin N.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 4. Решить уравнение $5^{\frac{x+2}{x}} \cdot 2^{x+1} = 500.$

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$5^{1+\frac{2}{x}} \cdot 2^{x+1} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5,$$

$$5^{\frac{-2(x-1)}{x}} \cdot 2^{x-1} = 1.$$

Отсюда $$\left(5^{-\frac{2}{x}} \cdot 2\right)^{x-1} = 1.$$

Полученное уравнение равносильно (при $x \neq 0$) совокупности двух уравнений $x - 1 = 0$, т.е. $x_1 = 1$ и $5^{-2/x} \cdot 2 = 1$,

Отсюда $5^{\frac{2}{x}} = 2$, т.е. $\frac{2}{x} = \log_5 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{\log_5 2} = 2\log_2 5.$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2\log_2 5$.

Примеры для самостоятельного решения

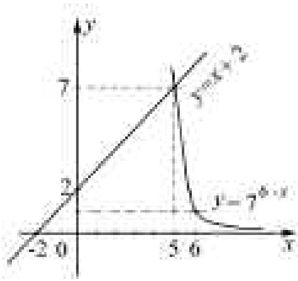
1. $5^{2x-1} = 7^{3-x}$, $\left[x = \dfrac{1 + 3\log_5 7}{2 + \log_5 7} \right]$

VI. Уравнения решаемые графически и аналитически

Некоторые уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени можно решить либо графически, либо с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $7^{6-x} = x + 2$.

Решение: (графически) 1. Строим график функции:



$$y_1 = 7^{6-x} = 7^{-(x-6)} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-6}.$$

График функции смещен на шесть единиц вправо, т.к. основание y_1 меньше 1, то график функции убывающий.

2. Строим график функции $y = x + 2$. Затем опускаем перпендикуляр на ось ОX. $x = 5$.

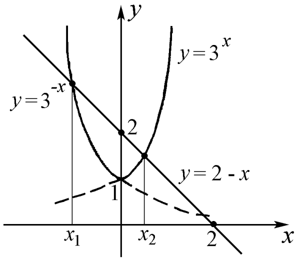
Решение 2. (аналитически)

$$y_1 = 7^{6-x}, \quad y_2 = x + 2$$

y_1 монотонно убывает, а y_2 монотонно возрастает, и, следовательно графики этих функций могут пересекаться не более одного раза. Корень $x = 5$ находится подбором.

Пример 2. Сколько корней имеет уравнение $3^{|x|} = 2 - x$.
Решение:

$$y_1 = 3^{|x|} = \begin{cases} 3^x, & x > 0 \\ 3^{-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x < 0. \end{cases}$$



Строим график функции

$$y = 3^{|x|} \quad \text{и} \quad y = 2 - x.$$

Ответ: 2 корня.

Пример 3. Решить уравнение $3^x + 4^x = 7$.

22:29

Решение: Легко указать и проверить, что $x = 1$ – корень данного уравнения. Покажем, что других корней уравнение иметь не может. Воспользуемся тем, что при $a > 1$ функция a^x является возрастающей.

При $x > 1$ имеем: $3^x + 4^x > 7$, а при $x < 1$ имеем: $3^x + 4^x < 7$, т.е. уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4. Решить уравнение $4^x + (x-13)\cdot 2^x - 2x + 22 = 0$.

Решение: Решив квадратное относительно 2^x уравнение, получим: $2^x = 2$ и $2^x = 11 - x$.

Корнем первого уравнения является $x = 1$, причем в силу возрастания функции 2^x этот корень единственный. Далее заметим, что так как $y = 2^x$ является функцией возрастающей, а функция $y = 11 - x$ – убывающей, то второе уравнение также не может иметь более одного корня. Легко угадать единственный корень $x = 3$, который можно найти и графически.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Сколько корней имеет уравнение $x - 3 = -2^{|x|}$. [2]

22:29

VII. Показательные уравнения, решаемые с помощью оценок

Пример 1. Решить уравнение $2^{\cos^2 x} = \sin 3x.$

Решение: $2^{\cos^2 x} \geq 1,$ а $\sin 3x \leq 1.$

Следовательно исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2^{\cos^2 x} = 1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2 x = 0, \\ \sin 3x = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin 3x = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, \qquad n = \frac{2}{3}k - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}k - n, \qquad n = \frac{2k-1}{3},$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}k - n, \qquad k = k = 3l + 2, \quad l \in Z$$

22:29

$$n=\frac{2(3l+2)-1}{3}=\frac{6l+3}{3}=2l+1.$$

Поэтому $x=\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)=\frac{3}{2}\pi+2\pi l, \quad l\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi(2l+1)=\frac{3}{2}\pi+2\pi l, \quad l\in Z.$

VIII. Показательные уравнения с параметром

Пример. При каких действительных a уравнение

$$(a+1)2^{2x}+2^{x}+3-a=0$$

имеет единственное решение?

Решение: Обозначим $2^{x}=t$, $t>0$.

$$(a+1)t^{2}+t+3-a=0,\quad t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(a+1)(3-a)}}{2(a+1)}.$$

Проанализируем возможные варианты.

1. Рассмотрим случай, когда квадратное уравнение выражается в линейное: при a = -1 имеем t = - 4 < 0. Следовательно при a = -1 уравнение не имеет решения.
2. Корень будет единственным если:

$$\begin{cases} D=0, \\ -\dfrac{1}{2(a+1)}>0. \end{cases}\quad \begin{cases} 4a^{2}-8a-11=0, \\ a<-1. \end{cases}\quad \begin{cases} a_{1,2}=1\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{15}, \\ a<-1. \end{cases}\Rightarrow\ \varnothing$$

$$a_{1}=1-\frac{\sqrt{15}}{2}\approx-0{,}9;\qquad\qquad a_{2}=1+\frac{\sqrt{15}}{2}\approx 2{,}9.$$

3. Корень будет единственным если: $\begin{cases} D > 0, \\ t_1 = 0, \\ t_2 > 0. \end{cases}$

Воспользуемся теоремой Виета

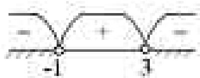
$$\begin{cases} \left(a - \left(1 - \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)\left(a - \left(1 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)\right) > 0, \\ t_1 + t_2 = \dfrac{-1}{a+1} > 0, \\ t_1 t_2 = \dfrac{3-a}{a+1} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; 1 - \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}; +\infty\right) \\ a < -1, \\ a = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a = 3. \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

4. Корень будет единственным, если: $\begin{cases} D > 0, \\ t_1 < 0, \\ t_2 > 0. \end{cases}$

Воспользуемся теоремой Виета

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; 1 - \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}; +\infty\right), \\ t_1 + t_2 = \dfrac{-1}{a+1} \gtrless 0, \\ t_1 t_2 = \dfrac{3-a}{a+1} < 0. \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty), \quad (*) \\ -\dfrac{1}{a+1 \lessgtr 0}. \end{cases}$$

Возможные случаи:

$- \ |t_1| < |t_2| \ : \ -\dfrac{1}{a+1} > 0 \quad \Rightarrow \ a < -1$, с учетом (*) $a \in (-\infty; -1)$.

22:29

$- \ |t_1| = |t_2| \ : \ -\dfrac{1}{a+1} = 0 \quad \Rightarrow \ a \in \varnothing.$

$- \ |t_1| > |t_2| \ : \ -\dfrac{1}{a+1} < 0 \quad \Rightarrow$ a > -1, с учетом (*) $a \in (3; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Примеры для самостоятельного решения

1. При каких значениях a уравнение $4^x - (a+1)2^x + 2a - 2 = 0$ имеет ровно один корень? $[a \in (-\infty; 1] \cup \{3\}]$

2. При каких действительных a уравнение

$$(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$$

имеет два различных корня? $\left[a \in \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p - 1 = 0$$

не имеет решений. $\left[p \in \left(-\infty; \frac{3}{7}\right) \cup [4;+\infty)\right]$

4. При каких значениях a уравнение $4^x - (3a+7)2^x + 21a = 0$ имеет единственный корень? [$x \in (-\infty; 0] \cup \{7/3\}$]

5. При каких значениях a уравнение $25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$ имеет единственное решение? [$x \in (-\infty; -3/2) \cup \{11\}$]

6. Решить уравнение $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$ для всех значений a. [при $a \in (3; 27)$: $x = 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}$, при $a \in (-\infty; 3] \cup [27; +\infty)$ решений нет]

7. Решить уравнение $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$ для всех значений a. [при $a \neq$ -3, $a \neq 1/2$, $a \neq$ -2: $x = \frac{2a-1}{a+3}$, при a = -3, $a = 1/2$, a = -2 решений нет]

IX. Системы показательных уравнений

Системы, содержащие показательные уравнения, обычно решаются сведением показательного уравнения к алгебраическому уравнению с последующим решением полученной алгебраической системы.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$

Решение: Область определения: $x+y>0$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2^{y-x}}, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y=2^{x-y}, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$$

Первое уравнение подставим во второе уравнение. Тогда $\left(2^{x-y}\right)^{x-y}=2 \quad \Rightarrow$

$$2^{(x-y)^2}=2 \quad \Rightarrow \quad (x-y)^2=1.$$

Решением данной системы будет решение совокупности систем

22:29

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=1/2. \end{cases}$$

Решим системы методом алгебраического сложения

$$\pm\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2. \end{cases} \qquad \pm\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=1/2. \end{cases}$$

$2x = 3,$ $\quad$ $2x = -1/2,$

$x = 3/2,$ $\quad$ $x = -1/4$

$-2y = -1,$ $\quad$ $-2y = -3/2,$

$y = 1/2.$ $\quad$ $y = 3/4.$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$

Примеры для самостоятельного решения

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=725, \\ 3^{x}-2^{y/2}=25. \end{cases}$ $\qquad$ [(3; 2)]

2. $\begin{cases} 4^{x+y}=128, \\ 5^{2x-2y-3}=1. \end{cases}$ В ответе указать значения ($2x + y$). $\qquad$ [6]

22:29

3. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x} + 2 \cdot 3^{y} = 2{,}75, \\ 2^{x} - 3^{y} = -0{,}75. \end{cases}$ [(-2; 0)]

4. $\begin{cases} (x+y)2^{y-2x} = 6{,}25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5. \end{cases}$ [(9; 16)]

5. $\begin{cases} x^{2} - 2^{y+1} = 1, \\ 2x^{2} + 2^{y-1} = 20. \end{cases}$ [(3; 2), (-3; 2)]

6. $\begin{cases} 3^{x} - 2^{2y} = 77, \\ 3^{x/2} - 2^{y} = 7. \end{cases}$ [(4; 1)]

7. $\begin{cases} 2^{x} \cdot 3^{y} = 12, \\ 2^{y} \cdot 3^{x} = 18. \end{cases}$ [(2; 1)]

8. $\begin{cases} 2^{x} - 2^{y} = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7. \end{cases}$ [(1; 0)]

9. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^{2} y = 1. \end{cases}$ $\left[(1;1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \sqrt[3]{9} \right) \right]$

X. Показательные неравенства

При решении простейших показательных неравенств надо помнить о том, что свойства показательной функции различны при основаниях, больших или меньше единицы.

$$a^u > a^v \Leftrightarrow \begin{cases} u > v, & \text{при } a > 1, \\ u < v, & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$a^u < a^v \Leftrightarrow \begin{cases} u < v, & \text{при } a > 1, \\ u > v, & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Пример 1. Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-25} > 1.$$

Решение: Неравенство перепишем в виде

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-25} > \left(\frac{1}{9}\right)^0.$$

Так как 1/9 < 1, то из преобразованного неравенства следует неравенство

$$x^2 - 25 < 0,$$

$$x^2 < 25,$$

$$-5 < x < 5.$$

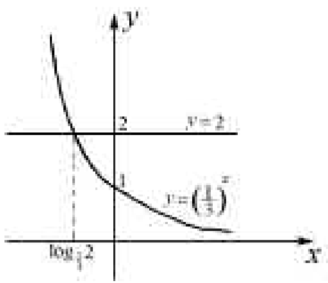
Т.е. наименьшее целое решение исходного неравенства равно –4.

Ответ: $x = -4$.

Пример 2. Решить неравенство $-1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2.$

Решение: Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \ge -1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}. \end{cases} \Rightarrow x > \log_{1/3} 2.$$



Решение 2 (графически). Решениями являются те значения x, при которых график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ лежит ниже горизонтальной прямой $y = 2$, т.е. все x правее абсциссы точки пересечения построенных

22:29

графиков (эта абсцисса является решением уравнения $(1/3)^x = 2$). Таким образом, решением неравенства является интервал $x > \log_{1/3} 2$.

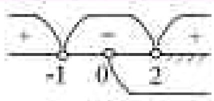
Пример 3. Решить неравенство $2^{2x-1} > 2^{x-1} + 1$.
Решение: Обозначим $2^x = t$, $t > 0$, тогда неравенство перепишется так:

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1 > 0,$$

$$t^2 - t - 2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad t_1 = 2, \ t_2 = -1.$$

$$\begin{cases} (t-2)(t+1) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$t \in (2; +\infty)$, т.е. $t > 2$.

$$2^x > 2,$$

$$x > 1.$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.
Решение: О.Д.З. $x \geq 0$. Запишем исходное неравенство в виде

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})},$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}.$$

Так как основание $0 < 4/5 < 1$, то последнее неравенство равносильно неравенству $x-1 > 4(1+\sqrt{x})$ (знак неравенства изменился на противоположный).

Далее имеем $x - 4\sqrt{x} - 5 > 0$, откуда $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1) > 0$, т.к. $\sqrt{x}+1 > 0$, для любого $x > 0$, то $\sqrt{x} - 5 > 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} > 5$.

Окончательно получим $x > 25$.

Ответ: $x \in (25; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\dfrac{75 - 25^{x^2+6x-15}}{2} \geq 5^{x^2+6x-14}$.

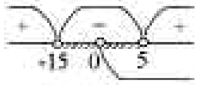
Решение: Положим $t = 5^{x^2+6x-15}$, $t > 0$. Тогда данное неравенство перепишется в виде

$$\begin{cases} t^2 + 10t - 75 \leq 0, \\ t > 0. \end{cases} \qquad t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 75}}{2} = \frac{-10 \pm 20}{2},$$

22:29

$$t_1 = 5, \quad t_2 = -15.$$

$$\begin{cases} (t-5)(t+15) \le 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$$0 < t \le 5, \qquad 0 < 5^{x^2+6x-15} \le 5.$$

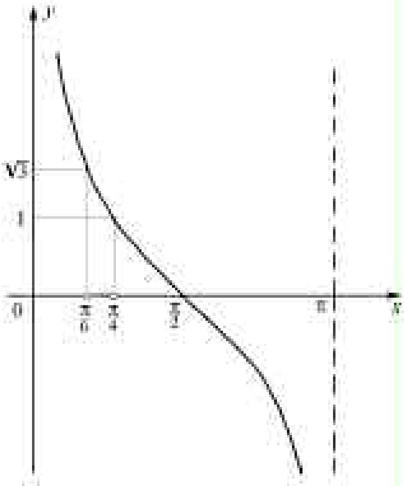
Левое неравенство выполнено для всех x, а правое – равносильно неравенству $x^2 + 6x - 16 \le 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}, \quad x_1 = -8, \; x_2 = 2.$$

$$(x+8)(x-2) \le 0,$$

$$-8 \le x \le 2.$$

Ответ: $x \in [-8; 2]$



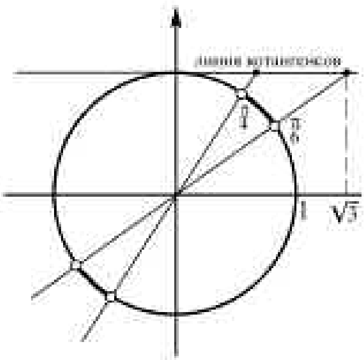
Пример 6. Решить неравенство $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$.

Решение: Так как основание степени $0 < 0{,}5 < 1$, то приходим к неравенству

$$\sqrt{3} > \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} > 1,$$

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x.$$

Остается решить неравенство $1 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$. Построив график функции $y = \operatorname{ctg} x$, получим ответ.



$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$ или на единичной окружности

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \quad n \in Z$.

Пример 7. Решить неравенство $\left(x^2 + x + 1\right)^x < 1$.

Решение: Для любых действительных x квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ положителен, а поэтому О.Д.З. этого неравенства состоит из всех действительных x.

Так как обе части исходного неравенства положительны для всех x, то прологарифмировав это неравенство по основанию 10, получим равносильное ему неравенство

$$x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Оно распадается на две системы неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) < 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) > 0. \end{cases}$$

Решим первую, она равносильна системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x + 1) < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + 1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -1. \end{cases} \Rightarrow \varnothing,$$

т.е. система несовместима.

Решим вторую систему, она равносильна системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x + 1) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x + 1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < -1. \end{cases} \Rightarrow x < -1.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1)$.

Пример 8. Решить неравенство $8^x + 3 \cdot 2^{x+1} < 7$.

Решение: Функция $f(x) = 8^x + 3\cdot 2^{x+1}$ возрастает на R как сумма двух возрастающих функций. Легко видно, что $x = 0$ – единственный корень уравнения $y = f(x) = 7$. Следовательно, неравенство $f(x) < 7$ удовлетворяется при $x > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0)$

Пример 9. Решить неравенство $(0{,}5)^{x-2} > 6$.

Решение: Запишем неравенство в виде

$$2^{2-x} > 2\cdot 3.$$

Прологарифмировав его по основанию 2, получим

$$2 - x > 1 + \log_2 3,$$

откуда $x < 1 - \log_2 3$ (при логарифмировании знак неравенства сохраняется, так как основание $2 > 1$).

Ответ: $x \in (-\infty; 1 - \log_2 3)$

Пример 10. Решить неравенство $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$.

Решение: Заметим, что обе части данного неравенства положительны, следовательно, определены логарифмы этих частей, например, по основанию 2

$$\log_2 2^x < \log_2 3^{1/x},$$ т.е. эти неравенства равносильны.

$$x < \frac{1}{x}\log_2 3,$$

$$x - \frac{1}{x}\log_2 3 < 0,$$

$$\frac{x^2 - \log_2 3}{x} < 0,$$

$$\frac{\left(x - \sqrt{\log_2 3}\right)\left(x + \sqrt{\log_2 3}\right)}{x} < 0.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\log_2 3}\right) \cup \left(0; \sqrt{\log_2 3}\right)$

В заключении приведем задачу, в которой возникает трудность необычного характера. Единственный ход рассуждений приводит, казалось бы, к необходимости решить неравенство, которое в действительности решить школьными методами невозможно. К цели ведет обходной путь: мы докажем, что это неравенство выполняется для всех допустимых значений x.

Пример 11. Решить неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x)2^x + 2^{x+1}x\sqrt{2 - x^2}.$$

Решение: Естественно перенести все члены в одну часть и попытаться разложить ее на множители. Испробовав несколько способов группировки, можно привести данное неравенство к виду

$$\left(x-1+2\sqrt{2-x^2}\right)\left(2^x x-4\right)<0.$$

Это неравенство, как обычно сводится к двум системам неравенств

$$\begin{cases} x-1+2\sqrt{2-x^2}>0, \\ 2^x x-4<0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-1+2\sqrt{2-x^2}<0, \\ 2^x x-4>0. \end{cases}$$

Решить по отдельности каждое из неравенств системы, а затем взять общую часть полученных решений не получится, т.к. неравенства $2^x x - 4$ ><0 привычными школьными методами «не решаются». Поэтому приходится рассуждать несколько иначе: решить первое неравенство системы и исследовать знак выражения $2^x x - 4$ на найденном множестве решений.

Неравенство $x - 1 + 2\sqrt{2-x^2} > 0$ решается стандартным способом: оно выполняется при $-1 < x \le \sqrt{2}$.

Теперь на этом промежутке рассмотрим функцию $y = 2^x x - 4$, нас интересует ее знак. Ясно, что если $x \le 0$, то $y < 0$, другими словами на промежутке $-1 < x \le 0$ функция y отрицательна. Пусть теперь $0 < x \le \sqrt{2}$. При этих значениях x

$$2^x x - 4 \le 2^x \sqrt{2} - 4 \le 2^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 4 = 2^{\sqrt{2}+1/2} - 4 < 0,$$

поскольку $\sqrt{2} + \dfrac{1}{2} < 2.$

Таким образом, мы доказали, что неравенство $2^x x - 4 < 0$ справедливо на всем промежутке $-1 < x \le \sqrt{2}$, так что это промежуток является решением первой системы.

Вторую систему можно было бы решить совершенно аналогично, но проще поступить по-другому. Как мы только что показали, функция $y = 2^x x - 4$ отрицательна при всех $x \le \sqrt{2}$. В частности она отрицательна в промежутке $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, являющемся О.Д.З. первого неравенства. Следовательно, вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \in \left(-1; \sqrt{2}\right]$

Примеры для самостоятельного решения

I. Найти наименьшее целое x.

1. $9^x > 8 \cdot 3^x + 9,$ [3]

2. $-2 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \le 9,$ [-2]

3. $2^{x+3} + 10 \cdot 11^{x+2} < 11^{x+3} + 2^{x+2},$ [-1]

4. $10^{-x-1,5} > 10 \cdot (0,01)^{x},$ [3]

5. $11^{-0,00(5)^{x}} < \frac{1}{1331},$ [541]

6. $5^{2} \cdot 5^{4} \cdot 5^{6} \cdot \ldots \cdot 5^{2x} < (0,04)^{-28},$ [1]

7. $7^{x+2} + 15 \cdot 2^{x} > x^{x+6} + 45 \cdot 7^{x}.$ [3]

II. Найти наибольшее целое x.

1. $(x+1)^{x^{2}-36} < 1,$ [5]

2. $2^{x^{2}} \cdot 49 > 16 \cdot 7^{x^{2}-2},$ [1]

3. $2^{x+1} + \frac{1}{2} 2^{x} < 5,$ [0]

4. $(0,2)^{\frac{x+2}{4-x}} \le 0,04,$ [3]

5. $4^{3x-1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{5-\frac{11}{3}x}$. [2]

III. Решить неравенство.

1. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} < \frac{25}{4}$, [$x \in (-\infty; -2)\cup(-2/5; \infty)$]

2. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}$, [$x \in (-7; \infty)$]

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^{x} - 2 > 0$, [$x \in (-\infty; \log_{2/5}2)$]

4. $5 \cdot 3^{2x^2-3x-1} - 2 \cdot 3^{2x^2-3x} + 3^{2x^2-3x-3} \geq 72$, [$x \in (-1; 5/2]$]

5. $6 \cdot 2^{3x^2-2x} - 3 \cdot 2^{3x^2-2x+2} + 2^{3x^2-2x-2} \geq -184$, [$x \in (-1; 5/3]$]

6. $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$, [$x \in (1; \infty)$]

7. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$, [$x \in (-\infty; \log_{2/5}2)$]

8. $4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0,$ $[x \in (-1/2;\ 0) \cup (0;\ 1/2)]$

9. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}},$ $[x \in (0;\ 1)]$

10. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0,$ $[x \in (-\infty;\ 0) \cup (1/2;\ \infty)]$

11. $0{,}4^{\log_2^2 x+1} < 6{,}25^{2-\log_2 x^3},$ $[x \in (0;\ 2) \cup (32;\ \infty)]$

12. $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geq 0,$

$$\left[x \in (-\infty;-1) \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [3;\infty)\right]$$

13. $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}},$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z\right]$

14. $27^x - 1 > 2\left(9^x - 3^x\right),$ $[x \in (0;\ \infty)]$

IV. Найти наибольшее отрицательное целое решение неравенства

1. $28 \cdot 2^{x-2} - 4^x < 10,$ $[-1]$

2. $\dfrac{(1/3)^{8+x}-81}{x^2+2x+5}<0,$ [–1]

3. $(0,5)^{1/x}\geq 0,0625.$ [–1]

V. Найдите все целые решения неравенства

1. $0,2\leq 5^{x+4}\leq 125,$ $x\in\{-5, -4, -3, -2, -1\}$

2. $1<10^{x+1}\leq 1000000,$ $x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. $0,04\leq 5^{2-x}\leq 25.$ $x\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$

VI. Решить неравенство. В ответе записать количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству

1. $(0,5)^{x^2+3x}\geq 0,125\cdot 2^{-x},$ [5]

2. $(1,25)^{1-x^2}-(0,4096)^{1+x}>0.$ [5]

VII. Решить показательно-степенное неравенство

1. $(x-3)^{2x^2-7x}>1,$ $x\in(3;\ 3,5)\cup(4;\ +\infty)$

2. $(x^2-2,5x+1)^{x+1}\leq 1.$ $x\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 0,5)\cup(2;\ 2,5)$

XI. Системы показательных и логарифмических неравенств

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

В ответ записать длину промежутка, на котором выполняется система неравенств.

Решение:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{7/2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x > \left(\dfrac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{7/2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 3,5 < 3,5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 7 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ (x+1)(x-7) < 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 3).$$

22:29

Длина интервала (3 – (-1)) = 4.

Ответ: 4.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}} = 2, \\ (x+y)\cdot 4^{x} = 64. \end{cases}$ [(2, 2)]

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0{,}5. \end{cases}$

[(4, 1)]

3. Найти целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \left(x^2+8\right)^{\log_8 x} < (6x)^{\log_8 x}, \\ x < 1. \end{cases}$$ [3]